

3

Intégration numérique

3.1 Position du problème

Nous allons maintenant nous intéresser à l'obtention d'une valeur numérique approchée de l'intégrale définie

$$I = \int_a^b g(x)dx,$$

où $[a, b]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et g une fonction réelle intégrable sur l'intervalle $[a, b]$.

Supposons que $\forall x \in [a, b]$

$$g(x) = f(x)w(x),$$

telle que

$$I = \int_a^b f(x)w(x)dx,$$

avec

$$w(x) > 0, \quad \forall x \in]a, b[, \quad \text{et} \quad \int_a^b w(x)dx < +\infty$$

où f une fonction réelle, $a < b$, w est une fonction donnée, dite *fonction poids*, ne s'annulant pas sur l'intervalle $]a, b[$ et intégrable sur $[a, b]$ telle que l'intégrale I existe.

L'idée de base des méthodes numériques pour résoudre ce problème (qu'on appelle, méthodes de quadrature) est de remplacer f que l'on ne sait pas intégrer par son polynôme d'interpolation. On a alors une méthode de quadrature de type interpolation.

Le problème de l'intégration numérique (ou dite de quadrature) peut se présenter de deux façons différentes :

- Une fonction $f(x)$ est connue par quelques-uns de ses points de collocation $\{x_i, f(x_i)\}_{i=0}^n$ (qui sont régulièrement espacés ou non). Comment fait-on pour estimer la valeur de l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$$

alors que l'expression analytique de $f(x)$ n'est pas connue ? ou encore, on cherche la valeur de l'intégrale définie $I = \int_a^b f(x)dx$ lorsque l'expression analytique de l'intégrand $f(x)$ est connue, mais non sa primitive.

- On connaît des formules qui permettent de calculer l'intégrale de certaines fonctions. Mais, contrairement à ce qui se passe pour le calcul des dérivées, il y a relativement peu de fonctions dont on sait calculer l'intégrale. Il suffit même de changer légèrement l'expression d'une fonction pour passer d'une fonction que l'on sait intégrer à une fonction qu'on ne sait pas intégrer.

Il est temps de donner quelques exemples concrets.

Exemple 1.

1. Comment calculer

$$I_1 = \int_a^b e^{x^2} dx$$

ou la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$$

qui n'ont pas de primitive explicite ?

2. Un autre exemple, emprunté à la mécanique, est l'équation qui régit le mouvement d'un pendule simple dont les oscillations sont grandes et dont l'équation est donnée par

$$I_3 = \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \varphi}} = \text{cte}$$

où cte et a sont des paramètres du mouvement, qui ne possèdent pas de solutions approximatives.

3. On sait que

$$\int_a^b \sin x \, dx = \cos a - \cos b,$$

mais on ne sait pas calculer

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{ou} \quad \int_a^b \sin(x^2) dx.$$

Or la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est intégrable sur tout intervalle $[a, b]$ puisqu'elle est continue sur $\mathbb{R}$. Il en est de même pour la fonction $x \mapsto \sin(x^2)$.

Ces problèmes, pourtant très différents, peuvent être résolus avec les mêmes outils. À défaut de pouvoir calculer ces intégrales, on doit savoir les approcher. Mais, même s'il s'agit d'intégrales qu'on sait calculer, leur calcul peut être long et compliqué et il peut être avantageux de le remplacer par un calcul approché. Enfin, il y a un autre cas où il est indispensable d'approcher une intégrale : c'est lorsque l'expression de la fonction à intégrer n'est pas connue. Il se peut que la fonction ne soit connue qu'en un certain nombre de points : ses valeurs peuvent venir d'un autre calcul ou de mesures ponctuelles. Mais le cas le plus fréquent est celui où la fonction à intégrer fait partie des inconnues, par exemple lorsque c'est la solution d'une équation différentielle.

Un début de solution :

Exemple 2.

Evaluons approximativement $\int_1^4 f(x)dx$ où la fonction f passe par les points

x	1	2	5
$f(x)$	2	5	15

On peut approximer la fonction f par le polynôme d'interpolation de degré 2

$$P_2(x) = 2(x-1) - \frac{1}{12}(x-1)(x-2).$$

Alors, on approxime l'intégrale cherchée par

$$\int_1^4 f(x)dx \approx \int_1^4 P_2(x)dx = 19,125.$$

Dans ce qui suit nous utiliserons des méthodes de type interpolatoire. Cette façon de voir les choses est celle que nous allons généraliser :

- établir des “formules de quadrature simple” par interpolation ;
- décomposer l'intervalle en intervalles élémentaires ;
- en déduire des “formules composites”.

Avantages :

- (i) les polynômes sont faciles à intégrer ;
- (ii) cette méthode est utilisable même si on ne connaît que des valeurs de f puisqu'on peut alors construire le polynôme P_n d'interpolation de f sur ces valeurs.

Nous interpolons la fonction $f(x)$ ou ses points de collocation avec un polynôme, puis nous intégrons explicitement ce polynôme. Nous supposons dans ce qui suit que la distance entre points de collocation adjacents est constante et vaut h (le pas).

On rappelle le théorème suivant dont nous ferons un usage constant et qui est un outil essentiel dans les méthodes d'approximation des intégrales (Voir Appendix A)

Théorème 3.1. (Second théorème de la moyenne)

Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles définies et continues sur un intervalle $[a, b]$. On suppose que g ne change pas de signe dans $[a, b]$. Alors, il existe un point ξ dans l'intervalle $[a, b]$ où on a l'égalité

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

Notez que le premier théorème de la moyenne est un cas particulier de ce théorème ; il est obtenu en prenant $g = 1$.

Cadre d'étude

Soit donc $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ et soit P_n le polynôme d'interpolation de f (et non pas $f(x)w(x)$!) en ces points. D'après le théorème sur l'obtention du polynôme d'interpolation de Lagrange, on a

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x),$$

où $E_n(x)$ est l'erreur d'interpolation en x . Par conséquent, en intégrant sur $[a, b]$, on obtient :

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = \int_a^b P_n(x)w(x)dx + \int_a^b E_n(x)w(x)dx.$$

Par conséquent,

$$I = I_n + R_n,$$

où

$$I_n = \sum_{i=0}^n f(x_i)A_i^{(n)}, \quad (3.1)$$

$$A_i^{(n)} = \int_a^b L_i(x)w(x)dx \quad (3.2)$$

$$R_n(f) = \int_a^b E_n(x)w(x)dx. \quad (3.3)$$

Utilisons maintenant la formule d'interpolation de Lagrange, il vient :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)w(x)dx &= \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i)w(x)L_i(x)dx + \int_a^b \prod_{i=0}^n (x - x_i)w(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} dx \\ &= \sum_{i=0}^n A_i^{(n)} f(x_i) + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^n (x - x_i)w(x) f^{(n+1)}(\xi(x)) dx, \end{aligned}$$

La formule de quadrature s'écrit :

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{i=1}^n A_i^{(n)} f(x_i) + R_n(f)$$

où l'erreur de quadrature est donnée par

$$R_n(f) = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^n (x - x_i)w(x) f^{(n+1)}(\xi(x)) dx$$

On prendra la somme finie $\sum_{i=1}^n A_i^{(n)} f(x_i)$ comme approximation de I ; l'erreur de la formule de quadrature est donnée par $R_n(f)$.

Soit $\mathcal{P}_n$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n . Le résultat suivant est évident, car il découle de la définition des polynômes d'interpolation.

Théorème 3.2.

Une condition nécessaire et suffisante pour que $R_n(f) = 0$ est que $f \in \mathcal{P}_n$.
On dit que la formule de quadrature est exacte sur $\mathcal{P}_n$.

Ce résultat est valable, quel que soit le choix des abscisses d'interpolation. Il est clair que d'après (3.2), les $A_i^{(n)}$ dépendent seulement des abscisses $x_0, \dots, x_n$ et sont indépendante de l'intégrand f . C'est l'une des propriétés importantes de la formule de quadrature. Un choix évident serait celui des abscisses équiréparties. Nous allons donc, dans un premier temps nous borner à un choix particulièrement simple des x_i .

Remarque 1.

Quelques remarques s'imposent.

- (a) Les $A_i^{(n)}$ sont difficiles à calculer directement. Ils ne dépendent pas de la fonction f ;
- (b) Lorsque $f \in P_n[X]$, on a $f \equiv P_n$, son polynôme d'interpolation. Donc la formule d'intégration de Newton-Côtes d'ordre n doit être exacte sur la base standard de $P_n[X]$:

$$\{y = x^k : k = 0, \dots, n\}$$

où nous avons posé, $y_i = f(x_i)$. Ainsi donc, les $A_i^{(n)}$ doivent vérifier

$$\int_a^b x^k dx = \sum_{i=0}^n A_i^{(n)} x_i^k, \quad k = 0, \dots, n,$$

ou encore, en intégrant :

$$\frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1} = \sum_{i=0}^n A_i^{(n)} x_i^k, \quad k = 0, \dots, n.$$

Ceci est un système linéaire de $(n+1)$ équations à $(n+1)$ inconnues dont le déterminant est celui de Vandermonde. On peut donc, en le solutionnant, trouver les $A_i^{(n)}$ valables pour toutes fonctions où les x_i sont données une fois pour toutes.

Avant de continuer, donnons quelques définitions.

Définition 1.

- (i) On appelle *subdivision* de l'intervalle $[a, b]$ tout $(n+1)$ -uplet $\sigma := (x_0, \dots, x_n)$ vérifiant $a := x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$. On appelle *pas* de la subdivision σ , la quantité

$$\|\sigma\| := \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}).$$

- (ii) On appelle *formule de quadrature* à $(n+1)$ points, la somme finie (3.1), où les $A_i^{(n)}$ ne dépendent pas de f et $x_i \in [a, b]$.

- (iii) On appelle *formule de quadrature de "type interpolation"* une formule
$$\int_a^b P_f(x)w(x)dx$$
 où P_f est le polynôme interpolateur de f .

- (iv) L'*erreur de quadrature numérique* est donnée par

$$R_n(f) := I(f) - \int_a^b P_f(x)w(x)dx = \int_a^b E_n(x)w(x)dx.$$

- (v) Une méthode d'intégration approchée est dite d'ordre n si $I(f) = I_n(f)$ pour tout $f \in \mathbb{R}_n[x]$ et si $I(f) \neq I_n(f)$ pour au moins un $f \in \mathbb{R}_{n+1}[x]$.
- (vi) Une formule de quadrature est dite *exacte* sur un ensemble V si $\forall f \in V$, $R(f) = 0$.

Exemple 3.

Choisissons $w(x) = 1$. Par exemple en posant $x_0 = a$, $x_1 = b$ et $h = b - a$ et en utilisant le polynôme de Lagrange, il vient

$$P_1(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1) \right] dx \\ &\quad + \int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))(x - x_0)(x - x_1) dx. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Comme $x \mapsto (x - x_0)(x - x_1)$ ne change pas de signe sur $[x_0, x_1]$, on peut appliquer le théorème de la moyenne au terme de l'erreur. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))(x - x_0)(x - x_1) dx &= f''(\xi) \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1) dx \\ &= f''(\xi) \left[\frac{x^3}{3} - \frac{(x_1 + x_0)}{2} x^2 + x_0 x_1 x \right]_{x_0}^{x_1} \\ &= -\frac{h^3}{6} f''(\xi). \end{aligned}$$

En conséquence, l'équation (3.4) implique

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \left[\frac{(x - x_1)^2}{2(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0^2)}{1(x_1 - x_0)} f(x_1) \right]_{x_0}^{x_1} - \frac{h^3}{12} f''(\xi) \\ &= \frac{(x_1 - x_0)}{2} [f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi). \end{aligned}$$

En remplaçant h par $x_1 - x_0$, on aboutit à :

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi).$$

On pourrait pousser les calculs plus loin en prenant un polynôme de degré 2. On obtiendrait :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2) \right] dx \\ &\quad + \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{6} f^{(3)}(\xi(x)) dx. \end{aligned}$$

Cette fois, en appliquant la formule de Taylor (mais nous ne détaillerons pas les calculs, car la preuve sera rigoureusement donnée plus loin), le terme d'erreur s'écrit :

$$R(f) = \frac{1}{24} \int_{x_0}^{x_1} f^{(4)}(\xi(x))(x - x_1)^4 dx,$$

si bien qu'en procédant comme précédemment, on arriverait à une formule du type

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_3)] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi).$$

Posons

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x). \quad (3.5)$$

Si nous dérivons r fois l'expression (3.5), nous obtiendrons

$$f^{(r)}(x) \approx \sum_{k=0} f(x_i) [A_i^{(n)}]^{(r)}(x) \quad (3.6)$$

avec l'erreur associée

$$E_n^{(r)}(x) = \frac{1}{(n+1)!} \frac{d^r}{dx^r} \left[\psi_n(x) f^{(n+1)}(\xi) \right]. \quad (3.7)$$

Cependant, puisque la dépendance de ξ sur x est encore inconnue, la différentiation dans (3.7) ne peut pas être explicitement effectuée. Afin d'obtenir une forme légèrement plus maniable du reste, nous allons passer par les différences divisées.

Considérons maintenant un support fermé de points $\{x_0, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$ et soit P_n le polynôme qui interpole f en ces points. En utilisant le terme d'estimation d'erreur (via les différences divisées), on peut écrire :

$$\forall x \in (a, b), \quad f(x) - P_n(x) = f[x_0, \dots, x_n, x] \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

En intégrant ensuite $f(x)w(x)$ sur $[a, b]$, il vient :

$$\begin{aligned} I = \int_a^b f(x)w(x) dx &= \underbrace{\int_a^b P_n(x)w(x) dx}_{(I_1)} \\ &+ \underbrace{\int_a^b f[x_0, \dots, x_n, x] \prod_{i=0}^n (x - x_i) w(x) dx}_{(I_2)} \\ &:= I_n + R_n. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Le terme (I_1) représente une valeur approchée de l'intégrale et (I_2) une erreur.

Les opérations effectuées ci-dessus sont possibles sous les hypothèses suivantes : w appartient à $L^1(a, b)$ et

pour tout $q \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^q w(x)$ appartient à $L^1[a, b]$.

Deux questions surgissent :

- (1) Comment évaluer la valeur approchée $\int_a^b P_n(x)w(x) dx$?
- (2) Comment estimer l'erreur $\int_a^b f[x_0, \dots, x_n, x] \psi_n(x) w(x) dx$?

3.2 Etude de l'erreur d'intégration

Nous avons vu au sous-paragraphe 2.5 (formules (2.13) et (2.24)) que si la fonction f était $(n+1)$ fois continument différentiable sur $[a, b]$, alors, $\forall w(x) > 0$,

$$\begin{aligned} E_n(x) &= \frac{\psi_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x)w(x), & \xi \in]a, b[\\ &= \psi_n(x) f[x, x_0, \dots, x_n]w(x) \end{aligned} \quad (3.9)$$

où le point ξ dépend de x et où où

$$\psi_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

D'où l'expression de l'erreur de quadrature :

$$R_n(f) = \int_a^b \frac{\psi_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) w(x) dx.$$

Pour évaluer cette erreur, on ne peut utiliser directement le Théorème de la moyenne 3.1, car $\psi_n(x)$ ne garde pas de signe constant lorsque x parcourt $[a, b]$. Une étude détaillée de l'erreur de quadrature s'impose par les différences divisées. Pour ce faire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, définissons

$$R_n(f) = \int_a^b f[x, x_0, \dots, x_n] \psi_n(x) w(x) dx. \quad (3.10)$$

Auparavant deux résultats utiles :

Proposition 3.3.

Si $f[x, x_1, \dots, x_n]$ est un polynôme en x de degré $m > 0$, alors $f[x, x_1, \dots, x_{n+1}]$ est un polynôme de degré $m - 1$.

Preuve. D'après les relations obtenues sur les différences divisées, on peut écrire :

$$)f[x, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}] = \frac{f[x_1, \dots, x_n, x_{n+1}] - f[x, x_1, \dots, x_n]}{x_{n+1} - x}. \quad (3.11)$$

Le résultat découle du fait que le numérateur du terme de droite de l'équation (3.11) est degré m et le dénominateur est un facteur du numérateur. On déduit le résultat en observant que le numérateur est nul si on prend $x = x_{n+1}$ pour le numérateur qui devient

$$f[x_1, \dots, x_{n+1}] = f[x_{n+1}, x_1, \dots, x_n].$$

qui est nul, puisque les différences divisées ne dépendent pas de l'ordre des x_i si on réarrange l'ordre de leurs arguments. $\square$

Ce résultat nous dit que si $f(x)$ est par exemple un polynôme de degré $2n-1$, un argument comme celui utilisé dans la proposition 3.3 montre que la première différence divisée $f[x, x_1]$ est un polynôme de degré $2n-2$ et en répétant la procédure, $f[x, x_1, \dots, x_n]$ est un polynôme de degré $n-1$.

Voici le deuxième résultat fondamental dont nous aurons besoin.

Lemme 3.4.

On a

$$\frac{d}{dx}f[x, x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n+2)}(\xi_x)}{(n+2)!}, \quad \xi \in [a, b].$$

Preuve. D'après la propriété 2.12, (Chap. 1), on a :

$$f[x, x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}, \quad \text{avec } \xi \in [a, b]$$

d'où

$$f[x, x+h, x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n+2)}(\xi_x)}{(n+2)!}.$$

D'après la définition des différences divisées et leur propriété de symétrie par rapport à leurs arguments, on a

$$f[x, x+h, x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x, x_0, \dots, x_n] - f[x+h, x_0, \dots, x_n]}{h}.$$

En faisant tendre h vers zéro, il vient

$$\lim_{h \rightarrow 0} f[x, x+h, x_0, \dots, x_n] = \frac{d}{dx}f[x, x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}.$$

avec $\xi \in [a, b]$, dépendant de x . □

L'interprétation de la formule donnant $R_n(f)$ dépend des propriétés des supports. Deux cas se présentent.

- 1er cas : ψ_n de signe constant sur $[a, b]$.

On applique le théorème de la moyenne (ainsi que sa généralisation indispensable si $[a, b]$ n'est pas borné ou si f n'est pas continue en a et/ou en b). Comme l'application $f[x_0, \dots, x_n, x]$ est continue, que le signe est constant et que $x \mapsto \psi_n(x)w(x)$ est intégrable, nous pouvons trouver $\xi \in (a, b)$ tel que

$$R_n = f[x_0, \dots, x_n, \xi] \int_a^b \psi_n(x)w(x)dx.$$

De façon équivalente, pour tout réel $x \in [a, b]$ grâce à l'existence d'un $\xi_x \in]a, b[$ tel que

$$f[x_0, \dots, x_k, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}, \quad (3.12)$$

et si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $]a, b[$, nous pouvons trouver $\xi \in]a, b[$ tel que

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b \psi_n(x)w(x)dx. \quad (3.13)$$

L'expression (3.13) suggère que si l'accroissement de la taille de la dérivée d'ordre $(n + 1)$ de f est compensée par la factorielle et l'intégrale de ψ_n alors l'erreur tendra vers 0 quand n tend vers l'infini.

- 2ème cas : ψ_n n'est pas de signe constant sur $[a, b]$.

Nous avons le résultat suivant

Proposition 3.5.

Considérons un point supplémentaire quelconque x_{n+1} de $[a, b]$. Alors, on peut écrire

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] = f[x_0, \dots, x_n, x_{n+1}, x](x - x_{n+1}) + f[x_0, \dots, x_{n+1}]. \quad (3.14)$$

Preuve. Pour tout $x \neq x_{n+1}$, on a

$$\begin{aligned} f[x_0, \dots, x_n, x_{n+1}, x] &= f[x, x_0, \dots, x_n, x_{n+1}] \\ &= \frac{f[x_0, \dots, x_n, x_{n+1}] - f[x, x_0, \dots, x_n]}{x_{n+1} - x} \end{aligned}$$

venant du fait que les différences divisées ne dépendent pas de l'ordre des x_i si on réarrange l'ordre de leurs arguments. La dernière expression peut se réécrire sous la forme

$$f[x_0, \dots, x_n, x_{n+1}, x] = \frac{f[x_0, \dots, x_n, x_{n+1}] - f[x_0, \dots, x_n, x]}{x_{n+1} - x},$$

d'où l'on déduit l'égalité souhaitée. Si $x = x_{n+1}$, l'égalité (3.14) est immédiate. $\square$

En utilisant le même raisonnement, on obtient mutatis mutandis, le résultats suivants :

Corollaire 3.6.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$.

- (i) Si $\psi_n(x)$ est de signe constant sur $[a, b]$, alors l'erreur s'écrit :

$$R_n(f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b \psi_n(x) w(x) dx, \quad \text{avec } \xi \in]a, b[. \quad (3.15)$$

- (ii) Si $\psi_n(x)$ n'est pas de signe constant sur $[a, b]$, et si la condition suivante a lieu

$$\int_a^b \psi_n(x) w(x) dx = 0, \quad (3.16)$$

nous noterons pour x_{n+1} quelconque dans $]a, b[$

$$\psi_{n+1}(x) = \psi_n(x)(x - x_{n+1});$$

alors l'erreur d'intégration s'écrit :

$$R_n = \int_a^b f[x_0, \dots, x_n, x_{n+1}, x] \psi_{n+1}(x) w(x) dx. \quad (3.17)$$

Preuve. Même démonstration que précédemment. $\square$

Remarque 2.

La différence entre (3.10) et (3.17) est qu'il y a un point de plus dans le support. En revanche, l'approximation de l'intégrale n'a pas changé :

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)w(x)dx.$$

Cependant, nous verrons que la condition (3.16) contribue à déterminer les réels $x_0, \dots, x_n$.

En modifiant la condition (3.16). On obtient dans ce cas :

Corollaire 3.7.

On se place dans le cas 2 du corollaire 3.6 et on suppose que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur $[a, b]$.

(i) Si $\psi_n(x)$ est de signe constant sur $[a, b]$, alors l'erreur s'écrit :

$$R_n(f) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_a^b \psi_{n+1}(x)w(x)dx, \quad \text{avec } \xi \in]a, b[. \quad (3.18)$$

(ii) Si $\psi_{n+1}(x)$ n'est pas de signe constant sur $[a, b]$, et si la condition suivante a lieu

$$\int_a^b \psi_n(x) \cdot (x - x_{n+1})w(x)dx = 0, \quad (3.19)$$

nous noterons pour x_{n+2} quelconque dans $]a, b[$

$$\psi_{n+2}(x) = \psi_{n+1}(x)(x - x_{n+2});$$

alors l'erreur d'intégration s'écrit :

$$R_n(f) = \int_a^b f[x_0, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, x] \psi_{n+2}(x)w(x)dx. \quad (3.20)$$

Preuve. Même démonstration que précédemment. $\square$

Remarque 3.

Ces résultats appellent à quelques commentaires.

En fait, on montre (voir plus loin, paragraphe 3.7) que si P interpole f aux points $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$, alors

$$R_n(f) = \begin{cases} -h^{n+3} \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_0^n t^2(t-1) \dots (t-n)ds, & \xi \in [a, b] \quad (n \text{ pair}), \\ h^{n+2} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_0^n t(t-1) \dots (t-n)ds, & \xi \in [a, b] \quad (n \text{ impair}). \end{cases}$$

En effet, en introduisant Ψ_n définies par

$$\Psi_n(x) = \int_a^x \psi(t) dt,$$

(i) on obtient, dans la cas pair

$$\begin{aligned} R_n(f) &= \int_a^b \psi_n(x) f[x, x_0, \dots, x_n] dx \\ &= \int_a^b \frac{d}{dx} \psi_n(x) f[x, x_0, \dots, x_n] dx \\ &= \left. \psi_n(x) f[x, x_0, \dots, x_n] \right|_a^b - \int_a^b \Psi_n(x) \frac{d}{dx} f[x, x_0, \dots, x_n] dx \\ &= - \int_a^b \frac{d}{dx} \Psi_n(x) f[x, x_0, \dots, x_n] dx, \end{aligned}$$

et on utilise ensuite, l'hypothèse $\Psi_n(a) = \Psi_n(b) = 0$; $\Psi_n(x) > 0 \quad \forall x \in]a, b[$.

(ii) Dans le cas n impair, on écrit

$$R_n(f) = \int_a^{b-h} \Psi_n(x) f[x, x_0, \dots, x_n] dx + \int_{b-h}^b \Psi_n(x) f[x, x_0, \dots, x_n] dx$$

et comme dans ce cas, $\Psi_n(x)$ ne change pas de signe, on obtient

$$R_n(f) = \int_a^{b-h} \Psi_n(x) f[x, x_0, \dots, x_n] dx + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_{b-h}^b \Psi_n(x) dx$$

où $\xi_1 \in [b-h, b]$.

Corollaire 3.8.

Soient les fonctions ψ_i définies itérativement pour $n \leq i \leq 2n$ par les conditions :

$$\psi_i \text{ n'est pas de signe constant sur }]a, b[\quad (3.21)$$

$$\psi_{i+1}(x) = (x - x_{i+1})\psi_i(x) = \prod_{j=0}^{i+1} (x - x_j), \quad (3.22)$$

avec les $(x_i)_{n+1 \leq j \leq 2n+1}$ des points quelconques de l'intervalle $]a, b[$. Si les $(n+1)$ contraintes suivantes sont vérifiées :

$$\forall i \in \{n, \dots, 2n\}, \quad \int_a^b \psi_i(x)w(x)dx = 0, \quad (3.23)$$

alors l'erreur d'intégration s'écrit :

$$R_n(f) = \int_a^b f[x_0, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n+1}, x] \psi_{2n+1}(x)w(x)dx. \quad (3.24)$$

Si de plus ψ_{2n+1} est de signe constant sur $[a, b]$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur $[a, b]$, alors l'erreur d'intégration s'écrit :

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_a^b \psi_{2n+1}(x)w(x)dx, \quad \text{avec } \xi \in]a, b[. \quad (3.25)$$

Preuve. Même démonstration que précédemment. □

L'étude détaillée des formules de types (3.2) et (3.3) fera apparaître leur instabilité ainsi que leur convergence lorsque le nombre des abscisses augmente. Nous serons ainsi amené à l'étude des "*formules d'intégration composites*". A la fin de ce chapitre, nous dirons quelques mots de la méthode de Gauss et la méthode des coefficients indéterminés.

3.3 Les formules simples de quadrature interpolatoire

Dans tout ce chapitre nous supposons que

$$\forall x \in [a, b], \quad w(x) = 1$$

$$g(x) = f(x).$$

Fixons à présent les notations. Dans ce sous-paragraphe, (3.8) s'écrit :

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b P_n(x)dx + \int_a^b f[x_0, \dots, x_n, x] \prod_{i=0}^n (x - x_i)dx$$

La valeur approchée de I est :

$$I_n = \int_a^b P_n(x)dx,$$

l'erreur d'interpolation

$$R_n(f) = \int_a^b f[x_0, \dots, x_n, x] \prod_{i=0}^n (x - x_i) dx$$

c'est à dire

$$I = I_n + R_n.$$

de sorte que nous utiliserons tous les résultats du sous-paragraphe précédent.

Nous allons étudier trois cas particuliers de la formule (3.8) correspondant à $n = 0, 1$ et 2 . Mais d'abord, il serait utile de faire quelques calculs préliminaires.

Calculs préliminaires.

- Calcul de $I_1 = \int_a^b \varphi(x) dx$ avec $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(x) dx &= \frac{\alpha}{3}(b^3 - a^3) + \frac{\beta}{2}(b^2 - a^2) + \gamma(b - a) \\ &= \frac{(b-a)}{6} [\alpha(2a^2 + b^2 + 2ab) + \beta(3a + 3b) + 6\gamma] \\ &= \frac{(b-a)}{6} [\varphi(a) + \varphi(b) + \alpha(a+b)^2 + 2\beta(a+b) + 4\gamma]. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \frac{(b-a)}{6} \left[\varphi(a) + \varphi(b) + 4\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) \right].$$

- Le cas où φ est une fonction constante égale à γ correspond à $\alpha = \beta = 0$, de sorte que

$$\int_a^b \varphi(x) dx = (b-a)\gamma = (b-a)\varphi(a).$$

- Le cas où φ est une fonction affine correspond à $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$, si bien que

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \frac{(b-a)}{6} [\beta a + \gamma + \beta b + \gamma + 4\beta \frac{a+b}{2} + 4\gamma] = \frac{(b-a)}{2} [\varphi(a) + \varphi(b)].$$

- Calcul de $I_2 = \int_a^b (x-a)^2(x-b) dx$,

Pour calculer l'intégrale I_2 , on peut faire développement du polynôme et ensuite l'intégrer. Mais il serait plus rapide de faire une intégration par parties en intégrant $u'(x) = (x-a)^2$, en dérivant $v(x) = x-b$ et en remarquant que le produit uv est nul en a et en b . On obtient ainsi

$$I_2 = -\frac{1}{3} \int_a^b (x-a)^3 dx = -\frac{1}{12}(b-a)^4.$$

- Calcul de $I_3 = \int_a^b (x-a)^2(x-b)^2 dx$.

Par deux intégrations par parties successives (en dérivant deux fois $x \mapsto (x-b)^2$) et en remarquant que les crochets intervenant s'annulent, on obtient :

$$I_3 = \frac{1}{6} \int_a^b (x-a)^4 dx = \frac{1}{30}(b-a)^5.$$

- L'intégrale $J_n = \int (a + bx^p)^n dx$ vérifie la formule :

$$(np + 1)J_n = x(a + bx^p)^n + anpJ_{n-1}.$$

Pour le montrer, on applique la formule d'intégration par parties en posant

$$u(x) = (a + bx^p) \quad \text{et} \quad dx = dv,$$

si bien que

$$\begin{aligned} J_n &= x(a + bx^p)^n - np \int (a + bx^p)^{n-1} bx^p dx \\ &= x(a + bx^p)^n - npJ_n + anpJ_{n-1}. \end{aligned}$$

3.3.1 L'interpolation linéaire : quadrature du rectangle et du point milieu

- *Interpolation par une fonction P_n de degré $n = 0$.*

On a le résultat suivant :

Proposition 3.9.

Dans le cas de degré $n = 0$, le support d'interpolation est réduit à $\{x_0\}$. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, la valeur approchée est :

$$I_0 = (b - a)f(x_0),$$

et l'erreur d'intégration est

$$R_0 = \int_a^b f[x_0, x](x - x_0)dx.$$

Preuve. Ici $I_0 = \int_a^b P_0(x)dx$ avec $P_0(x)$ défini par $P_0(x) = f[x_0] = f(x_0)$; d'où le résultat. Comme l'application F est continue, le caractère $\mathcal{C}^1$ garantit la continuité de l'application $x \mapsto f[x_0, x]$ et donc l'existence de

$$R_0 = \int_0^b f[x_0, x]\psi_0(x)dx,$$

avec $\psi_0(x)$ égal à $\psi_0(x) = (x - x_0)$. □

En choisissant x_0 comme extrémité de l'intervalle $[a, b]$, on obtient le résultat suivant :

Corollaire 3.10. (Méthode du rectangle)

Si f est de classe $\mathcal{C}^1([a, b])$, alors, pour $x_0 = a$, la valeur approchée vaut

$$I_r = (b - a)f(a). \quad (3.26)$$

Cette formule est d'ordre 0. L'erreur d'intégration vaut

$$R_r = \frac{(b - a)^2}{2} f'(\xi), \quad \xi \in]a, b[, \quad (3.27)$$

et, pour $x_0 = b$,

$$I_r = (b - a)f(b), \quad (3.28)$$

et l'erreur d'intégration vaut

$$R_r = \frac{(b - a)^2}{2} f'(\xi), \quad \xi \in]a, b[. \quad (3.29)$$

Preuve.

- Calcul de I_r . Traitons le cas $x_0 = a$ (le cas $x_0 = b$ étant similaire). L'expression de la valeur de I^R provient de la proposition 3.9. On remplace x_0 par a et on obtient

$$I_0 = \int_a^b P_0(x) dx = \int_a^b f[a] dx = (b - a)f(a).$$

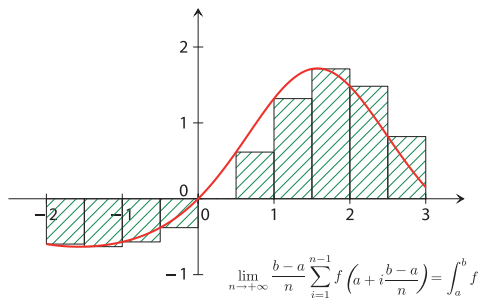
- L'erreur d'intégration s'écrit ici

$$R_r = \int_a^b f[a, x](x - a) dx.$$

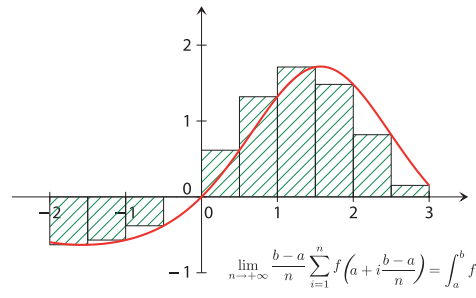
On remarque que $(x - a)$ garde un signe constant sur $[a, b]$; ainsi d'après le corollaire 3.6 (cas 1, (3.15) appliquée à $n = 0$ (car f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$),

$$\begin{aligned} R_r &= \frac{f'(\xi)}{1!} \int_a^b \psi_0(x) dx \\ &= f'(\xi) \int_a^b (x - a) dx \\ &= f'(\xi) \left[\frac{x^2}{2} - ax \right]_a^b = \frac{b^2}{2} - ab - \frac{a^2}{2} + a^2 \\ &= \frac{(b - a)^2}{2} f'(\xi), \quad \xi \in]a, b[. \end{aligned}$$

qui est le résultat annoncé. $\square$



Méthode des rectangles de gauche



Méthode des rectangles de droite

En choisissant pour $x_0 = \frac{a+b}{2} = m$, le milieu de l'intervalle $[a, b]$ avec un pas $h = \frac{b-a}{2}$, on obtient le résultat suivant :

Corollaire 3.11. (Méthode du point milieu, première formulation)

Si f est de classe $\mathcal{C}^2([a, b])$, alors la valeur approchée vaut

$$I_M = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right). \quad (3.30)$$

Cette méthode est d'ordre 1 et l'erreur d'intégration vaut

$$R_M = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi), \quad \xi \in]a, b[, \quad (3.31)$$

Preuve.

- Calcul de I_M . On applique encore la proposition 3.9 ; d'où l'expression de I_M .
- La méthode du point milieu est d'ordre 1. En effet

$$\begin{aligned} I_r(x) &= \int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2} \\ &= (b-a) \frac{b+a}{2} = I_0(x). \end{aligned}$$

Par contre, on n'a pas $I_r(x^2) = I_0(x^2)$.

- Calcul de l'erreur. On a :

$$R_M = \int_a^b f[m, x](x-m) dx, \quad \text{avec } m = \frac{a+b}{2}.$$

Ici $(x-m)$ change de signe sur $[a, b]$ donc on n'est plus dans le cas 1 du corollaire 3.6. Mais la condition d'orthogonalité (3.16) est vérifiée, puisque, (en posant $y = x-m$ et $h = b-a$), on obtient

$$\int_a^b (x-m) dx = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y dy = 0.$$

Ainsi, dans le cas 2 du corollaire 3.6, on peut introduire un point supplémentaire x_1 . Remarquons d'abord que

$$\frac{d}{dx}(x-a)(x-b) = 2x - a - b = 2x - (a+b) = 2(x-m)$$

si bien qu'on peut écrire

$$x-m = \frac{1}{2} \frac{d}{dx}(x-a)(x-b).$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned} R_M &= \int_a^b f[m, x](x-m)dx \\ &= \int_a^b f[m, x] \left\{ \frac{d}{dx}(x-a)(x-b) \right\} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_a^b (x-a)(x-b) \left\{ \frac{d}{dx} f[m, x] \right\} dx. \end{aligned}$$

en intégrant par parties. En utilisant le Lemme 3.4, on aboutit à :

$$R_M = -\frac{1}{2} \int_a^b f[m, x] (x-a)(x-b) dx.$$

En effet,

$$F(x) := \frac{d}{dx} f[m, x] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f[x+h, m] - f[x, m]}{h}$$

Ensuite on applique la relation (2.6) de récurrence sur les différences divisées pour simplifier, on arrive à

$$F(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f[x, x+h, m] = f[x, x, m].$$

De nouveau, puisque $x \mapsto (x-a)(x-b)$ est de signe constant sur $[a, b]$, on est dans le cas 1 du corollaire 3.6 et comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$,

$$\begin{aligned} R_M &= -\frac{1}{2} \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!} \int_a^b (x-a)(x-b)dx \\ &= -\frac{f^{(2)}(\xi)}{4} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{a+b}{2}x^2 + abx \right]_a^b \\ &= -\frac{f^{(2)}(\xi)}{4} \frac{(b-a)^3}{6} \\ &= -\frac{(b-a)^3}{24} f^{(2)}(\xi). \end{aligned}$$

qui est le résultat annoncé. □

- Maintenant traitons le cas général, c'est à dire, plaçons-nous dans l'intervalle $[x_0, x_2]$ et étudions l'erreur commise.

Corollaire 3.12. (Méthode du point milieu, deuxième formulation)

Si f est de classe $\mathcal{C}^2([x_0, x_2])$, alors, la valeur approchée vaut

$$I_M = 2hf(x_1), \quad (3.32)$$

et l'erreur d'intégration vaut

$$R_M = \frac{h^3}{3} f''(\xi), \quad \xi \in]a, b[. \quad (3.33)$$

Preuve. Le premier point est évident. Pour traiter le terme d'erreur, utilisons l'expression

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1)f[x, x_1],$$

obtenue en prenant $n = 0$ dans le polynôme de Newton et en remplaçant x_0 par x_1 .

Remarquons que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x - x_0)(x - x_2) &= (x - x_0)\frac{d}{dx}(x - x_2) + (x - x_2)\frac{d}{dx}(x - x_0) \\ &= 2x - x_0 - x_2 = 2(x - x_1). \end{aligned}$$

Ceci nous permet d'écrire

$$(x - x_1) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx}(x - x_0)(x - x_2)$$

si bien que

$$\int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)f[x, x_1]dx = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_2} \frac{d}{dx} \{(x - x_0)(x - x_2)\} f[x, x_1]dx.$$

En remarquant que

$$\begin{aligned} F(x) &:= \frac{d}{dx}f[x, x_1] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f[x + h, x_1] - f[x, x_1]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f[x, x + h, x_1] = f[x, x, x_1] \end{aligned}$$

on intègre par parties et on obtient

$$\begin{aligned} R_M(f) &= -\frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_2} (x - x_0)(x - x_2) \frac{d}{dx} f[x, x_1] dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_2} f[x, x_0, x_1](x - x_0)(x - x_2) dx \end{aligned} \quad (3.34)$$

Ceci nous motive à utiliser le Théorème de la moyenne 3.1, car la fonction $x \mapsto (x - x_0)(x - x_2)$ est de signe constant lorsque x parcourt $[x_0, x_2]$. Ainsi

$$\begin{aligned} R_M(f) &= -\frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_2} (x - x_0)(x - x_2) f[x, x, x_1] dx \\ &= -\frac{1}{2} \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!} \int_{x_0}^{x_2} (x - x_0)(x - x_2) dx \end{aligned} \quad (3.35)$$

En prenant $x_i = x_0 + ih$ et $x = x_0 + sh$ et en substituant ceci dans (3.34), on obtient

$$\begin{aligned} R_M(f) &= -\frac{1}{4}f^{(2)}(\xi)h^3 \int_0^2 s(s-2) ds \\ &= -\frac{h}{4}f^{(2)}(\xi)h^3 \left[\frac{1}{3}s^3 - s^2 \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{3}h^3 f^{(2)}(\xi). \end{aligned}$$

qui est le résultat annoncé. $\square$

3.3.2 L'interpolation linéaire : quadrature du trapèze

• **Interpolation par une fonction P_n de degré $n = 1$**

On souhaite évaluer

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx,$$

où $f(x)$ est une fonction connue seulement en deux points ou encore une fonction n'ayant pas de primitive. La solution qui vient tout de suite à l'esprit consiste à remplacer $f(x)$ par le polynôme degré 1 passant par les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$. La valeur approximative de l'intégrale correspond à l'aire sous la courbe de l'intégrale. Cette aire forme un trapèze qui donne son nom à la *méthode du trapèze*. Evidemment, l'approximation est grossière et on peut déjà soupçonner que le résultat sera peu précis.

Proposition 3.13.

Dans le cas de degré $n = 1$, le support d'interpolation est réduit à $\{x_0, x_1\}$. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$, la valeur approchée est :

$$I_1 = \int_a^b [f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0)] dx,$$

et l'erreur d'intégration est

$$R_1 = \int_a^b f[x_0, x_1, x](x - x_0)(x - x_1)dx.$$

Preuve. Ici $I_1 = \int_a^b P_1(x)dx$ avec $P_1(x)$ désigne le polynôme d'interpolation sur $\{x_0, x_1\}$; d'où le résultat. Le caractère $\mathcal{C}^2$ garantit la continuité de l'application $x \mapsto \psi_1(x) = (x - x_0)(x - x_1)$. $\square$

En choisissant $x_0 = a$ et $x_1 = b$, il vient

Corollaire 3.14. (Méthode du trapèze)

Si f est de classe $\mathcal{C}^2([a, b])$, alors, la valeur approchée vaut

$$I_T = (b - a) \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} \right), \quad (3.36)$$

Cette méthode est d'ordre 1. L'erreur d'intégration vaut

$$R_T = -\frac{(b - a)^3}{12} f''(\xi), \quad \xi \in]a, b[. \quad (3.37)$$

Preuve.

- Calcul de I_T . En terme de valeur approchée, $I_T = \int_a^b P_1(x) dx$ où P_1 désigne le polynôme d'interpolation de f sur $\{a, b\}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} I_T &= \int_a^b f[a] dx + \int_a^b f[a, b](x - a) dx \\ &= (b - a)f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \frac{(b - a)^2}{2}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

d'où le résultat annoncé (qu'on aurait pu déduire d'une interprétation géométrique via l'aire du trapèze).

- Pour l'erreur d'intégration

$$R_T = \int_a^b f[a, b, x](x - a)(x - b) dx.$$

Ici $\psi_1(x) = (x - a)(x - b) \leq 0$ sur $[a, b]$; donc la fonction $x \mapsto (x - a)(x - b)$ garde un signe constant sur $[a, b]$; ainsi d'après le corollaire 3.6 (cas 1, (3.15) appliquée à $n = 1$ (car f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$)),

$$\begin{aligned} R_T &= \frac{f''(\xi)}{2!} \int_a^b (x - a)(x - b) dx, \quad \xi \in]a, b[\\ &= \frac{f''(\xi)}{2!} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{a + b}{2} x^2 + abx \right]_a^b \\ &= \frac{f''(\xi)}{2!} \left[\frac{1}{3}(b^3 - a^3) - \frac{1}{2}(a + b)(b^2 - a^2) + ab(b - a) \right] \\ &= \frac{f''(\xi)}{2!} \frac{(b - a)}{6} [-b^2 - a^2 + 2ab] \\ &= -\frac{(b - a)^3}{12} f''(\xi), \end{aligned}$$

qui est le résultat souhaité. □

Exemple 4.

La méthode du trapèze pour la fonction f sur $[0, 2]$ est

$$\int_0^2 f(x)dx \approx f(0) + f(2).$$

Exemple 5.

Evaluons numériquement $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$, dont la valeur exacte est 1.
La méthode du trapèze donne dans ce cas :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx \approx \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\sin 0 + \sin \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{4} = 0,785\,398\,164,$$

qui est une approximation assez médiocre de la valeur exacte 1.

Exemple 6.

Pour approcher $\int_0^1 \exp(-x^2/2)dx$ avec ces méthodes,

- à 10^{-6} près, il faudra environ $n = 10^6$ respectivement $n = 10^3$,
- à 10^{-12} près, il faudra environ $n = 10^{12}$ respectivement $n = 10^6$,
- à 10^{-18} près, il faudra environ $n = 10^{18}$ respectivement $n = 10^9$.

Ces calculs sont souvent trop lents, même sur des ordinateurs puissants.

3.3.3 L'interpolation quadratique : quadrature de Simpson

• *Interpolation par une fonction P_n de degré $n = 2$*

Un travail préliminaire s'impose ; Reprenons le même raisonnement que dans la méthode des trapèzes, mais cette fois-ci en utilisant un polynôme de degré 2 dont la courbe passe par $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$, polynôme dont l'expression donnée par la formule de Newton par

$$P_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

Servons ensuite de l'approximation

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx &\approx \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)dx \\ &= \int_{x_0}^{x_2} \{f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)(x - x_0) \\ &\quad + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)\} dx. \end{aligned}$$

En se plaçant dans le cas où les abscisses sont également équidistantes, on pose de nouveau $\frac{x - x_0}{h} = s$, ce qui entraîne

$$(x - x_i) = (s - i)h,$$

si bien que

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx &= \int_0^2 (f(x_0) + f[x_0, x_1]hs + f[x_0, x_1, x_2]h^2s(s - 1)) hds \\ &= \int_0^2 (f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h}hs \\ &\quad + \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{2h^2}h^2s(s - 1))hds \\ &= \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)), \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)].$$

On a donc le résultat suivant :

Proposition 3.15.

Dans le cas de degré $n = 2$, le support d'interpolation est réduit à $\{x_0, x_1, x_2\}$. Si f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[a, b]$, la valeur approchée est :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_a^b f[x_0]dx + \int_a^b f[x_0, x_1](x - x_0) \\ &+ \int_a^b f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)dx, \end{aligned}$$

et on commet l'erreur d'intégration suivante :

$$R_2 = \int_a^b f[x_0, x_1, x_2, x](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)dx.$$

Preuve. Similaire à celle de la proposition 3.13. □

En choisissant $x_0 = a$ et $x_1 = \frac{a+b}{2}$, et $x_2 = b$, il vient

Corollaire 3.16. (Méthode de Simpson, première formulation)

Si f est de classe $\mathcal{C}^4([a, b])$, alors, la valeur approchée vaut

$$I_S = \frac{(b-a)}{6} (f(a) + 4f(m) + f(b)), \quad \text{avec } m = \frac{a+b}{2}. \quad (3.39)$$

Cette méthode est aussi d'ordre 3. L'erreur d'intégration commise vaut

$$R_S = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in]a, b[. \quad (3.40)$$

Preuve.

• Etude de la valeur approchée. Notons $m = (a+b)/2$, et désignons par I^S , l'intégrale $\int_a^b P_2(x)dx$ où P_2 interpole f sur $\{a, m, b\}$. Nous savons que l'ordre au moins des points de support ne modifie pas P_2 ; pour utiliser les résultats déjà établis dans la méthode du trapèze, écrivons que P_2 interpole f sur $\{a, b, m\}$. On a

$$P_2(x) = P_1(x) + f[a, b, m](x - a)(x - b)$$

si bien que

$$I^S = \int_a^b P_2(x)dx = \underbrace{\int_a^b P_1(x)dx}_{(I_1)} + \underbrace{\int_a^b f[a, b, m](x - a)(x - b)dx}_{(I_2)}.$$

L'intégrale I_1 est déterminée par (3.39). Il reste à calculer I_2 . Or

$$I_2 = f[a, b, m] \int_a^b (x-a)(x-b)dx.$$

Un calcul élémentaire fournit la valeur de l'intégrale; on trouve

$$\int_a^b (x-a)(x-b)dx = -\frac{(b-a)^3}{6}.$$

Par ailleurs, en raison des propriétés des différences divisées, remarquons que $f[a, b, m] = f[a, m, b]$; il vient

$$\begin{aligned} f[a, m, b] &= \frac{f[m, b] - f[a, m]}{b-a} \\ &= \frac{2}{(b-a)^2}((f(b) - f(m)) - (f(m) - f(a))), \end{aligned}$$

puisque $b-m = m-a = (b-a)/2$. En rassemblant les différents résultats intermédiaires il vient

$$I_S = (b-a) \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} \right) - \frac{(b-a)}{3} (f(a) - 2f(m) + f(b)),$$

c'est à dire l'égalité attendu. On remarquera que I_S est le barycentre de

$$f(a) \left(\frac{(b-a)}{6} \right), \quad f(m) \left(\frac{4(b-a)}{6} \right), \quad f(b) \left(\frac{(b-a)}{6} \right).$$

- Pour l'ordre de la méthode, on a :

$$\begin{aligned} I_S(x^3) &= \int_a^b x dx = \frac{b-a}{6} \left(a^3 + 4 \left(\frac{a+b}{2} \right)^3 + b^3 \right) \\ &= \frac{b^4 - a^4}{4} = I(x^3). \end{aligned}$$

Par contre $I_S(x^4) \neq I(x^4)$.

• *Etude du terme d'erreur dans la formule de Simpson*

Nous allons déterminer l'erreur que l'on commet en remplaçant I par I_S dans la méthode de Simpson.

Première méthode. On se place dans le cas $x_0 = \frac{a+b}{2} = m$ le milieu de l'intervalle $[a, b]$ avec un pas $h = \frac{b-a}{2}$. Nous allons montrer l'égalité (3.40).

Partons de

$$R_S = \int_a^b f[a, m, b, x](x-a)(x-m)(x-b)dx$$

et on remarque que l'application $\psi_2 : x \mapsto (x-a)(x-m)(x-b)$ change de signe dans l'intervalle $[a, b]$. D'autre part, la condition d'orthogonalité

$$\int_a^b \psi_2(x)dx = 0,$$

est vérifiée. En effet, le changement de variable, $y = x - m$ nous ramène à :

$$\begin{aligned} \int_a^b (x-a)(x-m)(x-b) dx &= \int_{\substack{y=x-m \\ h=b-a}}^{\frac{h}{2}} \left(y^3 - \frac{h^2}{4} y \right) dy \\ &= \frac{1}{8} \left[2y^4 - \frac{1}{8} h^2 y^2 \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = 0 \end{aligned}$$

car, intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle centré en 0. On est de nouveau dans le cas 2 du Corollaire 3.6 (appliquée à $n = 2$, car f est au moins de classe $\mathcal{C}^2([a, b])$). Par suite, nous pouvons introduire un point supplémentaire x_3 que nous choisirons, égal à m comme pour la méthode du milieu puisque le signe de $x \mapsto (x-a)(x-b)$ est constant. On en déduit que, puisque (3.16) est vérifiée, il vient, d'après (3.17) :

$$R_S = \int_a^b f[a, m, b, m, x] (x-a)(x-m)^2(x-b) dx.$$

Mais comme $\psi_3(x) = (x-a)(x-m)^2(x-b)$ est de signe constant sur $[a, b]$, on est de nouveau dans le cas 1 du Corollaire 3.17 ($n = 3$, $f \in \mathcal{C}^4$). Finalement, en utilisant le Théorème 3.1, on aboutit à :

$$R_S = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_a^b (x-a)(x-m)^2(x-b) dx.$$

Il ne reste qu'à intégrer cette dernière intégrale. Par un changement de variable on aboutit à

$$\begin{aligned} R_S(f) &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \left(y^2 - \frac{h^2}{4} \right) dy \\ &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \left[\frac{1}{5} y^5 - \frac{1}{12} h^2 y^3 \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \\ &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \frac{(b-a)^5}{120} = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi). \end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé. $\square$

Remarque 4.

Lorsque $n = 3$ alors en utilisant le polynôme d'interpolation de degré 3 sur $[x_0, x_3]$ et posant $h = x_{i+1} - x_i$, pour tout i , on obtient la formule de Simpson 3/8 suivante :

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{3}{8} h [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] - \frac{3}{80} f^{(4)}(\xi) h^5, \quad \text{où } \xi \in [x_0, x_3].$$

• Plaçons-nous à présent dans l'intervalle quelconque $[x_0, x_3] \subset [a, b]$ avec un polynôme de degré 3. Alors

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx - \frac{1}{3} h (f_0 + 4f_1 + f_2) = R_S(f),$$

où

$$R_S(f) = \frac{1}{24} \int_{x_0}^{x_3} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) f^{(4)}(\xi_x) dx.$$

Corollaire 3.17. (Méthode de Simpson, deuxième formulation)

Si f est de classe $\mathcal{C}^4([x_0, x_3])$, alors, la valeur approchée vaut

$$I_S = \frac{1}{3}h(f_0 + 4f_1 + f_2) \quad (3.41)$$

et l'erreur d'intégration commise vaut

$$R_S = -\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in]a, b[. \quad (3.42)$$

D'abord une remarque. On vérifie qu'en utilisant un polynôme de degré 3, on obtient

$$\int_{x_0}^{x_2} P_2(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} P_3(x) dx.$$

En effet, en rajoutant un quatrième point $(x_3, f(x_3))$, le polynôme de degré 3 correspondant d'après la formule de Newton donne

$$P_3(x) = P_2(x) + \frac{f(x_3) - P_2(x)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

et

$$\int_{x_0}^{x_2} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) dx = \int_0^2 s(s-1)(s-2) h^4 ds = 0.$$

On commence donc par écrire l'expression analytique d'erreur (2.13) avec $n = 3$:

$$f(x) - P_n(x) = \frac{1}{24}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)f^{(4)}(\xi_x), \quad (3.43)$$

et on suppose que $f^{(4)}$ est continue. Or on sait que la formule de Simpson est exacte si l'intégrand appartient à l'espace des polynômes $\mathcal{P}_3$ et donc

$$\int_{x_0}^{x_2} P_3(x) dx = \frac{1}{3}h(P_3(x_0) + 4P_3(x_1) + P_3(x_2)). \quad (3.44)$$

Comme P_3 interpole f aux points x_0, x_1, x_2 et x_3 , on déduit de (3.44) que

$$\int_{x_0}^{x_2} P_3(x) dx = \frac{1}{3}h(f_0 + 4f_1 + f_2). \quad (3.45)$$

Si on intègre ensuite (3.44) sur l'intervalle $[x_0, x_2]$, on obtient

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx - \frac{1}{3}h(f_0 + 4f_1 + f_2) = R_S(f) \quad (3.46)$$

c'est à dire

$$R_S(f) = \frac{1}{24} \int_{x_0}^{x_2} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) f^{(4)}(\xi_x) dx. \quad (3.47)$$

Mais, ici on ne peut appliquer à ce stade le théorème de la moyenne pour simplifier (3.47), comme dans la méthode du trapèze, puisque la fonction polynôme $x \mapsto (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ peut changer de signe dans l'intervalle $[x_0, x_3]$, en $x = x_1$ et $x = x_2$ à moins de choisir judicieusement x_3 .

Utilisons maintenant (2.7), pour $n = 2$

$$f(x) - P_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x, x_0, x_1, x_2],$$

intégrons sur l'intervalle $[x_0, x_2]$. L'intégration du polynôme d'interpolation $P_2(x)$ donne la formule de Simpson, obtenu en intégrant P_3 de (3.47). On obtient ainsi une expression de l'erreur de Simpson

$$R_S(f) = \int_{x_0}^{x_2} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x, x_0, x_1, x_2]dx \quad (3.48)$$

Remarquons d'autre part, que par intégration par parties,

$$\frac{d}{dx}(x - x_0)^2(x - x_2)^2 = 2(x - x_0)(x - x_2)\frac{d}{dx}(x - x_0)(x - x_2),$$

et puisque

$$\frac{d}{dx}(x - x_0)(x - x_2) = 2x - x_0 - x_2 = 2(x - x_1),$$

on obtient

$$\frac{d}{dx}(x - x_0)^2(x - x_2)^2 = 4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2),$$

si bien que

$$R_S(f) = \frac{1}{4} \int_{x_0}^{x_2} \left\{ \frac{d}{dx}(x - x_0)^2(x - x_2)^2 \right\} f[x, x_0, x_1, x_2] dx. \quad (3.49)$$

Ainsi, par intégration par parties de (3.49), on obtient

$$R_S(x) = -\frac{1}{4} \int_{x_0}^{x_2} (x - x_0)^2(x - x_2)^2 \frac{d}{dx}f[x, x_0, x_1, x_2]dx. \quad (3.50)$$

Ceci nous encourage à utiliser le théorème de la moyenne, puisque l'intégrand dans l'expression (3.50) est de la forme $F(x)G(x)$, où $G(x) = (x - x_0)^2(x - x_2)^2$, ne changeant pas de signe sur l'intervalle d'intégration. En appliquant le lemme 3.4 et le lemme 3.4 à l'expression (3.50), on aboutit à :

$$R_S(x) = -\frac{1}{4}f[\xi, \xi, x_0, x_1, x_2] \int_{x_0}^{x_2} (x - x_0)^2(x - x_2)^2dx, \quad (3.51)$$

où $\xi \in]x_0, x_3[$. Finalement, nous pouvons remplacer la différence divisée d'ordre quatre par la dérivée d'ordre 4, en utilisant la relation (2.24) et en intégrant la relation précédente, après substitution¹ de $x = x_0 + sh$ pour obtenir

$$R_S(x) = -\frac{1}{4}h^5 \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_0^2 s^2(s - 2)^2ds = -\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi). \quad (3.52)$$

¹On se place de nouveau dans le cas des abscisses equidistantes ; pour cela, il suffit de poser $s = \frac{x - x_0}{h}$, ce qui entraîne $x - x_i = (s - i)h$, calcul déjà fait dans la preuve du théorème 2.10.

- Voici une dernière façon de procéder.

Soit $P_2(x)$ le polynôme qui interpole $f(x)$ entre $(x_0, f(x_0), \dots, (x_2, f(x_2))$. On a donc

$$f(x) = P_2(x) + E(x).$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_2} P_2(x) dx + \int_{x_0}^{x_2} R_S(f) dx, \\ &= I_S(f) + R_S(f) \end{aligned} \quad (3.53)$$

Avec le changement de variable $x - x_0 = uh$, on obtient

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) \equiv I_S(f), \quad (3.54)$$

où $y_i = f(x_i)$. Notons la valeur approchée de l'intégrale par

$$R_S(f) = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx - I_S(f). \quad (3.55)$$

En modifiant les notations de la façon suivante : $x_0 = x_1 - h$, $x_2 = x_1 + h$ où $h = x_2 - x_1 = x_1 - x_0$, dans les intégrales (3.53) et (3.54), $R_S(f)$ devient une fonction de h que nous allons noter $R_S(h)$, et donc (3.55) devient :

$$R_S(h) = \int_{x_1-h}^{x_1+h} f(x) dx - \frac{h}{3} [f(x_1 - h) + 4f(x_1) + f(x_1 + h)]. \quad (3.56)$$

On obtient aussitôt $R_S(0) = 0$ et en dérivant trois fois par rapport à h , en utilisant pour ce faire le théorème fondamental du calcul différentiel intégral dans sa forme générale suivante :

$$\frac{d}{dx} \left[\int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt \right] = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x),$$

on obtient $R'_S(0) = 0 = E''_S(0)$ si bien que

$$R_S^{(3)}(h) = -\frac{1}{h^3} [f^{(3)}(x_1 + h) - f^{(3)}(x_1 - h)]. \quad (3.57)$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur l'intervalle $[(x_1 - h)(x_1 + h)]$, on peut appliquer le théorème de la moyenne sur cette dernière équation : $\exists, \xi \in](x_1 - h)(x_1 + h)[$ (qui dépend de h) tel que

$$f^{(3)}(x_1 + h) - f^{(3)}(x_1 - h) = 2hf^{(3)}(\xi).$$

En substituant cette relation dans (3.57), il vient

$$R_S^{(3)}(h) = -\frac{2h}{3} f^{(3)}(\xi), \quad (3.58)$$

où $\xi \in](x_1 - h)(x_1 + h)[$. Ensuite, en intégrant trois fois (3.57) (pour cela, on a besoin de $R''_S(0) = R'_S(0) = R_S(0) = 0$), on obtient $R_S(f)$ à l'aide du second théorème de la

moyenne pour les intégrales, c'est à dire le Théorème 3.1, pour lequel $f^{(3)}(\xi)$ est continue. Finalement, on a

$$\begin{aligned} R_S''(h) &= R_S''(0) + \int_0^h R_S''(t) dt \\ &= -\frac{2}{3} \int_0^h t^2 f^{(3)}(t) dt \\ &= -\frac{2}{3} f^{(3)}(\xi_1) \int_0^h t^2 dt = -\frac{2}{9} h^3 f^{(3)}(\xi_1) \end{aligned}$$

où on a l'existence de ξ_1 , dépendant de h dans $](x_1 - h)(x_1 + h)[$, puisque t^2 ne change pas de signe sur $[0, h]$. Ceci pour la première étape. Les autres étapes finissent par donner $R_S(h)$:

$$R_S(h) = -\frac{1}{90} f^{(3)}(\xi_2), \quad \xi \in](x_1 - h)(x_1 + h)[. \quad (3.59)$$

Exemple 7.

La méthode de Simpson pour la fonction f sur $[0, 2]$ est

$$\int_0^2 f(x) dx \approx \frac{1}{3} [f(0) + 4f(1) + f(2)].$$

Exemple 8.

Reprenons les calculs de l'exemple 5 et évaluons numériquement $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$, dont la valeur exacte est 1, mais cette fois-ci avec la méthode de Simpson $1/3$.

On a ici, $n = 2$, $\frac{b-a}{n} = \frac{\pi/2 - 0}{2} = \frac{\pi}{4}$; $\frac{h}{3} = \frac{\pi}{3 \times 12}$, si bien

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \approx \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{3} \left(\sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{2} \right) = 1,002\,2799.$$

Ce résultat est plus précis que celui obtenu par la méthode du trapèze simple, mais demeure peu satisfaisant.

Exemple 9.

Faisons un test en calculant $\int_0^1 e^{x^2} dx$ par la méthode composites du trapèze. C'est un test très utilisé, car cette intégrale peut être estimée par intégration terme par terme en utilisant la série de Maclaurin pour e^{x^2} . Ceci donne

$$\int_0^1 e^{x^2} dx = \int_0^1 \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{2r}}{r!} \right) dx = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)r!} \approx 1,462652. \quad (3.60)$$

Utilisons la table suivante :

N	2	4	10	20
$T_N(f)$	1,5716	1,4907	1,4672	1,4638
$T'_N(f)$	1,4583	1,4624	1,4626	1,4627

Dans cette table, les valeurs sont données avec quatre décimaux après la virgule.

Pour comparer avec la formule de Simpson, mettons dans la table de valeurs les résultats pour $T'_N(f)$, correspondant à la méthode corrigée des trapèzes

$$T'_N(f) = T_N(f) - \frac{h^2}{12}(f'(b) - f'(a))$$

pour toute fonction f dont la dérivée existe.

Les valeurs de $T_N(f)$ sont toutes plus grandes que les valeurs de l'intégrale, qui est consistante avec le fait que f'' est positive, puisque

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}e^{x^2} = (2 + 4x^2)e^{x^2} \geq 2$$

alors sur $[0, 1]$. Puisque f'' est monotone croissante, on a

$$2 \leq f''(x) \leq 6e$$

sur $[0, 1]$, et de la relation

$$\int_a^b f(x)dx - T_N(f) = -\frac{1}{12}(b-a)h^2 f''(\xi), \quad a < \xi < b,$$

l'erreur dans $T_N(f)$ est entre $1/(6N^2)$ et $e/(2N^2)$. Ainsi, par exemple, N pourrait être de l'ordre de 1000 pour estimer l'intégrale avec 6 chiffres décimaux.

Exemple 10.

Illustrons la méthode de Simpson en utilisant la fonction $f(x) = e^{x^2}$ sur $[0, 1]$ en comparaison avec l'exemple (9). Dans la table ci-contre, les valeurs de $S_N(f)$ tournent autour de quatre décimaux après la virgule.

N	1	2	5	10
$S_N(f)$	1,4757	1,4637	1,4627	1,4627

Pour faire la comparaison avec les formules composées $T_N(f)$ et $S_N(f)$, nous avons besoin de prendre en compte le fait que ces formules demandent respectivement $N + 1$ et $2N + 1$ évaluations pour l'intégrand f . Ainsi les valeurs correspondantes des tables de l'exemple 9 et celui de l'exemple 9 en utilisant les mêmes valeurs de l'intégrand, c'est à dire 3, 5, 11 et 21 respectivement.

On voit que d'après la table de l'exemple 9 que les résultats avec la formule de Simpson sont beaucoup précis que ceux des formules des trapèzes et comparable à ceux de la formule des trapèzes avec terme de la correction.

L'erreur

$$\int_a^b f(x)dx - S_N = -\frac{1}{180}(b-a)h^4 f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in]a, b[\quad (3.61)$$

demande le calcul de $f^{(4)}$ et on a

$$\frac{d^4}{dx^4}e^{x^2} = (12 + 48x^2 + 16x^4)e^{x^2}.$$

Cette dérivée quatrième étant positive sur $[0, 4]$, les estimations obtenues par les formule de Simpson sont toutes plus grandes que la valeur de l'intégrale. Comme $f^{(4)}$ est monotone croissante,

$$12 \leq f^{(4)}(x) \leq 76e \quad x \in [0, 1]$$

et d'après (3.61) l'erreur dans $S_N(f)$ vérifie

$$\frac{1}{240 N^4} \leq \left| \int_a^b f(x) dx - S_N \right| \leq \frac{19e}{720 N^4}.$$

Si nous calculons les nombres dans la table précédente avec une grande précision, nous obtenons $S_{20} \approx 1,462652$ et donc d'après (3.60), ceci est correct avec six décimales après la virgule.

Exemple 11.

Utilisons les formules des trapèzes et de Simpson pour estimer l'intégrale de $\int_0^2 \frac{1}{x^2} dx$. Puisque toutes les dérivées de l'intégrand sont indéfinies (car infinie) au point $x = 0$, l'estimation d'erreur de chacun des termes $T_N(f)$ et $S_N(f)$ nous apprend pas grande chose et nous ne pouvons pas utiliser la formule des trapèzes et son terme de correction. La table ci-dessous donne la comparaison de $T_{2N}(f)$ et $S_N(f)$, chacun demandant $2N + 1$ évaluations de l'intégrand, pour cette intégrale, dont la valeur est $\frac{2}{3}$.

N	1	2	5	10
$T_{2N}(f)$	0,6036	0,6433	0,605	0,6644
$S_N(f)$	0,6381	0,6565	0,6641	0,6658

La table montre que bien que $S_N(f)$ donne un meilleur résultat que $T_{2N}(f)$ pour toutes valeurs de N utilisées, il n'y a pas de différence dramatique dans la performance des deux formules comme nous l'avons vue dans l'intégrand de e^{x^2} .

Remarque 5.

Notons d'après les formules (3.27), (3.29), (3.31), (3.37), (3.40) que

- (i) la formule du rectangle est exacte pour des polynômes de degré 0 ;
- (ii) la formule du milieu est exacte pour des polynômes de degré 1 ;
- (iii) la formule du trapèze est exacte pour des polynômes de degré 1 ;
- (iv) la formule de Simpson est exacte pour des polynômes de degré 3.

3.3.4 Division des fonctions différentiables et applications

Il existe plusieurs preuves des Théorèmes majorant l'erreur dans la méthode de quadrature. Nous allons à présent en donner un fondamental qui est une variante à celui que nous avons déjà rencontrée dans le chapitre sur l'interpolation.

Théorème 3.18.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur $\mathbb{R}$ et a un réel tel que $f(a) = 0$. Il existe une unique application continue $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = (x-a)g(x)$. Cette application g est de classe $\mathcal{C}^p$ et

$$\forall q \in \{0, \dots, p\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| g^{(q)}(x) \right| \leq \frac{1}{q+1} \sup_{t \in [a, x]} \left| f^{(q+1)}(t) \right|. \quad (3.62)$$

Preuve. Si la fonction g existe, elle est unique puisqu'elle doit concider avec la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x-a}$ sur tout $\mathbb{R} \setminus \{a\}$. La fonction

$$g(x) = \int_0^1 f'(a + (x-a)u) du \quad (3.63)$$

est continue et vérifie bien

$$\begin{aligned} (x-a)g(x) &= \int_0^1 (x-a)f'(a + (x-a)u) du \\ &= \int_a^x f'(t) dt = f(x). \end{aligned}$$

Tout ceci nous permet d'appliquer le Théorème de dérivation sous le signe somme : la fonction g définie par (3.63) est n fois dérivable, si bien que

$$\forall q \in \{0, \dots, p\}, \quad g^{(q)}(x) = \int_0^1 u^q f^{(q+1)}(a + (x-a)u) du.$$

La formule (3.62) s'en déduit. $\square$

Remarque 6.

Le Théorème 3.18 permet de majorer l'erreur commise en remplaçant une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur $\mathbb{R}$ par le polynôme d'interpolation de Lagrange P_f qui prend les mêmes valeurs que f sur les points $x_0, x_1, \dots, x_p$.

Soit $[a, b]$ un intervalle fermé contenant les x_i . En appliquant le Théorème 3.18 à la fonction

$$x \mapsto f(x) - P_f(x)$$

on obtient

$$f(x) - P_f(x) = (x - x_0)g_0(x)$$

avec

$$\left| g_0^{(p)}(x) \right| \leq \frac{1}{(p+1)} \sup_{t \in [a, x]} \left| f^{(p+1)}(t) \right|.$$

(puisque $P_f^{(p+1)}(x)$ est le polynôme nul). En recommençant avec g_0 ,

$$g_0(x) = (x - x_0)g_1(x)$$

avec

$$\left| g_1^{(p-1)}(x) \right| \leq \frac{1}{p} \sup_{t \in [a, x]} \left| g_0^{(p)}(t) \right|.$$

En continuant ainsi, on obtient

$$g_{k-1}(x) = (x - x_k)g_k(x)$$

avec

$$\left| g_k^{(p-k)}(x) \right| \leq \frac{1}{(p-k-1)} \sup_{t \in [a, x]} \left| g_{k-1}^{(p-k+1)}(t) \right|$$

pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$. Finalement

$$f(x) - P_f(x) = (x - x_0) \dots (x - x_p)g_p(x)$$

avec

$$\left| g_p(x) \right| \leq \frac{1}{(p+1)!} \sup_{t \in [a, x]} \left| f^{(p+1)}(t) \right|.$$

On déduit le résultat fondamental suivant :

Théorème 3.19.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur $\mathbb{R}$. Si P_f désigne le polynôme d'interpolation de Lagrange qui coïncide avec f sur les points $x_0, x_1, \dots, x_n$, si $[a, b]$ désigne un intervalle fermé contenant les x_i , et si $M_{p+1} = \sup_{t \in [a, x]} |f^{(p+1)}|$, alors

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - P_f(x)| \leq \frac{M_{p+1}}{(p+1)!} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|.$$

L'erreur d'intégration dans la méthode à n pas est majorée par

$$\sum_{i=1}^n \frac{M_{p+1}}{(p+1)!} \left(\frac{b-a}{n} \right)^{p+1} = \frac{M_{p+1}}{n^p (p+1)!} (b-a)^{p+1}.$$

Ce théorème permet de majorer l'erreur que l'on commet en remplaçant le calcul de $I = \int_a^b f(x)dx$ par celui de $J = \int_a^b P_f(x)dx$ dans la méthode de Lagrange à un pas utilisant des réels $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_p \leq b$ et des polynômes de Lagrange $P_f(x)$ de degré p tels que $P(\xi_i) = f(\xi_i)$ pour tout $i \in \{0, 1, \dots, p\}$. On obtient

$$\begin{aligned} R_n = |I - J| &= \left| \int_a^b (f(x) - P_f(x))dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - P_f(x)|dx \\ &\leq \frac{M_{p+1}}{(p+1)!} (b-a)^{p+1}. \end{aligned}$$

L'erreur faite dans la méthode à n pas est alors majorée par

$$\sum_{i=1}^n \frac{M_{p+1}}{(p+1)!} \left(\frac{b-a}{n} \right)^{p+1} = \frac{M_{p+1}}{n^p (p+1)!} (b-a)^{p+1}.$$

Si $p = 2$, donc dans ce cas de Simpson, on obtient $\frac{M_3}{6n^3}(b-a)^3$ comme majorant de l'erreur, ce qui est bien plus mauvais que la majoration $\frac{M_4}{2880n^4}(b-a)^5$ obtenue précédemment.

3.4 La stabilité et la convergence

La stabilité et la convergence sont deux notions distinctes, mais nous allons voir qu'elles ne sont pas indépendantes ; en fait la condition de stabilité est la même que celle de la convergence. Il est évident que ces deux notions sont théoriques et indépendantes de la méthode de quadrature utilisée.

La stabilité est une notion qui exprime le fait que la formule de quadrature doit n'être que peu sensible aux erreurs de calcul faites sur les quantités $f(x_i)$ pour $i = 1, 0, \dots, n$.

En fait au lieu de calculer $\sum_{i=1}^n A_i^{(n)} f(x_i)$ on calcule $\sum_{i=1}^n A_i^{(n)} (f(x_i) + \varepsilon_i)$, d'où l'erreur égale à $\sum_{i=0}^n A_i^{(n)} \varepsilon_i$.

Définition 2.

Une formule de quadrature est dite *stable* si $\forall (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n) \in \mathbb{R}_+^{*n}$, $\exists M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\left| \sum_{i=0}^n A_i^n \varepsilon_i \right| \leq M \max_k |\varepsilon_k|.$$

Théorème 3.20.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une formule de quadrature soit stable est qu'il existe une constante $\exists M \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$\left| \sum_{i=0}^n A_i^{(n)} \right| \leq M, \quad \forall n.$$

Preuve. On a

$$\left| \sum_{i=0}^n A_i^{(n)} \varepsilon_i \right| \leq \sum_{i=0}^n \left| A_i^{(n)} \right| \max_i |\varepsilon_i|$$

et par conséquent la condition est suffisante. La condition est nécessaire car s'il n'existait pas M indépendante de n vérifiant cette condition, alors on aurait :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \left| A_i^{(n)} \right| = \infty.$$

Choisissons $\varepsilon_i = \frac{A_i^{(n)}}{|A_i^{(n)}|}$. On a $\left| \sum_{i=0}^n A_i^{(n)} \varepsilon_i \right| = \sum_{i=0}^n |A_i^{(n)}|$,

et par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \left| A_i^{(n)} \right| = \infty.$$

Le théorème est donc démontré. $\square$

La notion de convergence exprime le fait que l'erreur de quadrature tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini et que la fonction f appartient à un certain intervalle.

Définition 3.

Une formule de quadrature est dite *convergente* sur V si et seulement si $\forall f \in V$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f) = 0.$$

Soit $\mathcal{C}^\infty([a, b])$ l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$ avec la norme de Chebychev :

$$\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

L'étude de la convergence des formules de quadrature de Newton-Côtes sur $\mathcal{C}^\infty([a, b])$ s'effectue de la même manière comme nous l'avons fait pour la convergence des formules d'interpolation (Voir Théorèmes de la section 2, paragraphe 2.7). On a donc bien évidemment :

Théorème 3.21.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une formule de quadrature soit convergente sur $\mathcal{C}^\infty([a, b])$ est

- (a) qu'elle soit convergente sur l'espace des polynômes ;
- (b) qu'il existe M indépendant de n tel que

$$\left| \sum_{i=0}^n A_i^{(n)} \right| \leq M, \quad \forall n.$$

Pour les formules de quadrature du type interpolation que nous étudions ici la première des conditions est vérifiée par la construction même de ces formules de quadrature. La seconde condition apparaît donc comme la condition nécessaire et suffisante pour que la méthode de quadrature de Newton-Côtes, soit stable et convergente sur $\mathcal{C}^\infty([a, b])$.

Voyons maintenant si cette condition est vérifiée pour la méthode de Newton-Côtes. On a le résultat suivant :

Théorème 3.22.

Si les abscisses x_i sont équidistantes sur $[a, b]$ alors les coefficients $A_i^{(n)}$ de la méthode de quadrature de Newton-Côtes sont tels que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une formule de quadrature soit stable est qu'il existe une constante $\exists M \in \mathbb{R}_+$ telle que $\sum_{i=0}^n |A_i^{(n)}|$ n'est pas bornée inférieurement pour tout n . Par conséquent, la méthode de Newton-Côtes est instable et il existe au moins une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty([a, b])$ pour laquelle la méthode ne converge pas.

Remarque 7.

C'est pour cette raison que les méthodes de Newton-Côtes ne sont pas utilisées en pratiques. Il y a deux possibilités pour remédier à l'instabilité et à la non convergence : les méthodes composites d'une part et d'autre part un choix des abscisses x_i non équidistants. Nous allons donc étudier ces deux possibilités.

3.5 Les formules composites de quadrature interpolatoire

Commençons par un exemple.

Exemple 12.

Cherchons une approximation de l'intégrale $\int_0^4 e^x dx$. Par la méthode de Simpson, avec $h = 2$, on obtient

$$\int_0^4 e^x dx \approx \frac{2}{3}(e^0 + 4e^2 + e^4) = 56,76958$$

Puisque la valeur exacte dans ce cas est $e^4 - e^0 = 53,59815$, l'erreur $-3,171143$ est acceptable.

Afin d'appliquer une technique de découpage par morceaux à ce problème, partageons l'intervalle $[0, 4]$ en $[0, 2]$ et $[2, 4]$ et utilisons la méthode de Simpson avec $h = 1$:

$$\begin{aligned}\int_0^4 e^x dx &= \int_0^2 e^x dx + \int_2^4 e^x dx \\ &\approx \frac{1}{3}[e^0 + 4e + e^2] + \frac{1}{3}[e^2 + 4e^3 + e^4] \\ &= 53,86385.\end{aligned}$$

L'erreur a été réduite à $-0,26570$. Motivé par ce résultat, nous subdivisons les intervalles $[0, 2]$ et $[0, 4]$ et nous utilisons la méthode de Simpson avec maintenant $h = \frac{1}{3}$. Il vient

$$\begin{aligned}\int_0^4 e^x dx &= \int_0^1 e^x dx + \int_1^2 e^x dx + \int_2^3 e^x dx + \int_3^4 e^x dx \\ &\approx \frac{1}{6}[e^0 + 4^{1/4} + e] + \frac{1}{6}[e + 4e^{3/2} + e^2] \\ &\quad + \frac{1}{6}[e^2 + 4e^{5/2} + e^3] + \frac{1}{6}[e^3 + 4e^{7/2} + e^4] \\ &\approx \frac{1}{6}[e^0 + 4e^{1/2} + 2e + 4e^{3/2} + 2e^2 \\ &\quad + 4e^{5/2} + 2e^3 + 4e^{7/2} + e^4] \\ &= 53,61622.\end{aligned}$$

L'erreur pour cette approximation a été maintenant réduite à $-0,01807$.

L'idée des méthodes composites est simple. On écrit que :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^b f(x) dx.$$

Puis sur chaque sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on calcule une valeur approchée de l'intégrale à l'aide d'une formule de quadrature de Newton-Côtes avec n faible. En pratique, on utilise $n = 1$ et $n = 2$, ce qui conduit à la méthode des trapèzes et à celle de Simpson lorsque les abscisses x_i sont équidistants. Nous prendrons systématiquement $w(x) = 1$.

3.5.1 Méthode composite des rectangles

Dans la méthode composite des rectangles, on remplace la fonction à intégrer f par une fonction constante par morceaux $h(x)$ sur chaque intervalle élémentaire $[x_i, x_{i+1}]$, c'est à dire

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx.$$

Soit,

- (i) pour les rectangles à gauche : $h(x) = f(x_i)$ pour $x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_i)$$

(ii) soit pour les rectangles à droite : $h(x) = f(x_{i+1})$ pour $x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_{i+1}).$$

Théorème 3.23.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^0[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors la formule composite des rectangles est donnée par

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) - \frac{(b-a)^2}{2} f'(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

Somme de Riemann

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a, b]$. On considère une subdivision régulière $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ avec $0 \leq k \leq n$. La somme de Riemann associée à f est alors :

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(x_k). \quad (3.64)$$

Les sommes de Riemann sont utilisées pour le calcul des intégrales par la méthode des rectangles. En effet :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_a^b f(t) dt. \quad (3.65)$$

Notons que la limite (3.65) est vérifiée sous la seule hypothèse où f est continue sur $[a, b]$.

Notons $\mathcal{J}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions Riemann intégrables définies sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (qui est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel).

Si $f \in \mathcal{J}([a, b], \mathbb{R})$, alors

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \longrightarrow \int_a^b f, \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Ainsi par exemple, lorsque $n \rightarrow +\infty$.

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{1+x} dx = \ln 2.$$

Exemple 13.

Soit $f(x) = \cos x$. Evaluons $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$ par la somme de Riemann en prenant 10 points équirépartis : $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{20}$, $x_2 = \frac{2\pi}{20}$, $\dots$, $x_{10} = \frac{10\pi}{20} = \frac{\pi}{2}$, et comparons le résultat avec la valeur exacte de l'intégrale.

Soit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. En posant $x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$, $\xi \in [x_{i-1}, x_i]$. On sait que

$$\int_0^{\pi/2} f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} [f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})]$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx &\approx \frac{\pi}{20} \left(1 + \cos \frac{\pi}{20} + \cos \frac{2\pi}{20} + \dots + \cos \frac{9\pi}{20} \right) \\ &= \frac{\pi}{20} (1 + 0,98769 + 0,95106 + \dots + 0,15643) \\ &= \frac{\pi}{20} (6,85310) = 1,07648. \end{aligned}$$

La valeur exacte de l'intégrale étant : $\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$, ainsi notre évaluation est réduite d'environ 7.6%.

Remarque 8.

La méthode des rectangles revient à considérer $\int_a^b f(x) dx$ comme limite des sommes de Riemann de f lorsque le pas $\max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$ des subdivisions de $[a, b]$ tend vers 0. Pour une subdivision régulière, on obtient (3.64). Dans les trois cas, la méthode de quadrature simple revient à remplacer f par une application constante et la méthode de quadrature composée n'est autre que le calcul d'une somme de Riemann.

Exercice corrigé 3

Bonus

Donner, par la méthode des rectangles, un encadrement des intégrales I , proposées ci-après. On précisera l'incertitude sur les résultats.

(a) $I = \int_0^{1/2} (1 - t^2)^{-1/2} dt$ (5 intervalles);

(b) $I = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \ln(\sin t) dt$ (6 intervalles);

(c) $I = \int_{0,1}^{0,8} -\ln^{-1} t \, dt$ (? intervalles ... à votre avis?).

(a) Soit $f(t) = (1 - t^2)^{-1/2}$. Par la méthode des rectangles, on obtient

$$I = \frac{0,5}{5} [f(0,5) - f(0)] = 0,015$$

(b) Posons $g(t) = \ln(\sin t)$. On obtient par le même procédé $D = 0,121$.

t	$f(t)$
0	1
0,1	1,0050
0,2	1,0206
0,3	1,0483
0,4	1,0911
0,5	1,1547

$\frac{t}{\pi}$	$g(t)$
$1/6 = 3/18$	-0,6931
$2/9 = 4/18$	-0,4419
$5/18$	-0,2665
$1/3 = 6/18$	-0,1438
$7/18$	-0,0622
$4/9 = 8/18$	-0,0153
$1/2 = 9/18$	0

Soit : $1,033 < I < 1,064$ et $-0,271 < I < -0,155$.

(c) Avec 7 intervalles : $0,918 < I < 1,323$; $D \approx 0,405$.

Majoration de l'erreur dans la méthode du point à gauche ou à droite

Lorsque la dérivée première de f est bornée par une constante M , l'erreur dans la méthode des rectangles est donnée par l'expression

Théorème 3.24.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Pour $n \geq 1$, soit $h = \frac{b-a}{n}$ et soit

$$R_r(f) := h \sum_{i=0}^{n-1} f(a + ih)$$

l'approximation obtenue par le point à gauche. Alors, on a la majoration d'erreur

$$\left| \int_a^b f(x) dx - R_r(f) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \cdot \frac{1}{n} \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)|.$$

La même majoration est valable pour le point à droite.

Preuve. On considère l'intervalle $[\alpha, \beta]$ où $\alpha = a + (i-1)h$ et $\beta = a + ih$ et on pose

$$F(h) = \int_{\alpha}^{\alpha+h} f(x) dx.$$

On a $F'(h) = f(\alpha + h)$ et $F''(h) = f'(\alpha + h)$. En appliquant la formule de Taylor au deuxième ordre

$$\exists c \in]0, h[, \quad F(h) = F(0) + hF'(0) + \frac{h^2}{2}F''(c).$$

Soit encore

$$\exists c \in]0, h[, \quad \int_{\alpha}^{\alpha+h} f(x) dx = hf(\alpha) + \frac{h^2}{2}f'(\alpha + c).$$

Posons

$$S = h \sum_{i=0}^{n-1} f(a + iah)$$

En appliquant la formule précédente, on obtient la majoration cherchée

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - S \right| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{a+ih}^{a+(i+1)h} f(x) dx - hf(x) \right| \\ &\leq \frac{h^2}{2} \sum_{i=0}^{n-1} |f'(a+ih+c)| \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{(b-a)^2}{n} \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)|, \end{aligned}$$

puisque $h = (b-a)/n$. □

Pour augmenter la précision obtenue, on augmentera n , ce qui revient à passer à des subdivisions de plus en plus fines. Or, la précision n'augmente que très lentement, c'est à dire, $\sim \frac{1}{n}$. Pour gagner un bit de précision, il faut deux fois plus de travail.

3.5.2 Méthode composite du point milieu

En fait l'approche de la subdivision d'intervalles peut-être aussi utilisée pour les méthode d'ordre inférieur. Nous allons donner le théorème pour l'extension pour la méthode du point milieu sans preuve. Puisque la méthode du trapèze exige seulement un intervalle pour chaque application, l'entier n peut être pair ou impair. Pour la méthode du point milieu, n doit être encore un entier pair.

Théorème 3.25. (Méthode composite du point milieu)

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$, n un entier pair, $h = \frac{(b-a)}{n+2}$ et $x_i = a + (i+1)h$, pour $i = -1, 0, 1, \dots, n+1$. Alors, il existe un $\xi \in]a, b[$ pour lequel, la méthode composite du point milieu, pour $(n+2)$ sous-intervalles, peut s'écrire avec son erreur d'intégration, sous la forme

$$\int_a^b f(x) dx = 2h \sum_{i=0}^{n/2} f(x_{2i}) - \frac{b-a}{24} h^2 f^{(2)}(\xi). \quad (3.66)$$

Remarque 9.

La formule composite du milieu (3.66) peut aussi s'écrire :

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{n} \sum_{i=0}^n f(x_i) - \frac{b-a}{24} h^2 f^{(2)}(\xi). \quad (3.67)$$

où x_i est le milieu du i -ième sous-intervalle. Puisque les n sous-intervalles sont identiques, ils sont de la forme $[a+ih, a+(i+1)h]$, avec $h = \frac{(b-a)}{n}$ et $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Ceci entraîne finalement que $x_k = a + (i + \frac{1}{2})h$. La formule (3.66) est d'ordre 1.

Exemple 14.

Pour $f(x) = x^3$, on connaît l'intégrale $\int_0^1 f(x) dx = 0,25$.

Une subdivision équidistante à $n = 10$ pas donne respectivement les approximations

$$I_r^{\text{gauche}} = \frac{81}{100} = 0,2025, \quad I_M = \frac{199}{800} = 0,24875 \quad \text{et} \quad I_R^{\text{droite}} = \frac{121}{400} = 0,3025.$$

On constate que l'approximation par point au milieu est nettement plus précise.

Majoration de l'erreur dans la formule composite le point au milieu

Théorème 3.26.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2([a, b])$. Pour $n \geq 1$, soit $h = \frac{b-a}{n}$ et soit

$$R_M := h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \frac{h}{2} + ih\right)$$

l'approximation obtenue par le point au milieu. Alors, on a la majoration d'erreur

$$\left| \int_a^b f(x) dx - R_m(f) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{24} \cdot \frac{1}{n^2} \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

Preuve. On considère l'intervalle $[\alpha, \beta]$ où $\alpha = a + (i-1)h$ et $\beta = a + ih$. On fait un développement d'ordre 1 autour du point milieu $x_0 = \frac{\alpha+\beta}{2}$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2.$$

Ainsi

$$|f(x) - f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)| \leq \frac{1}{2} \max |f''|(x - x_0)^2.$$

On constate que que

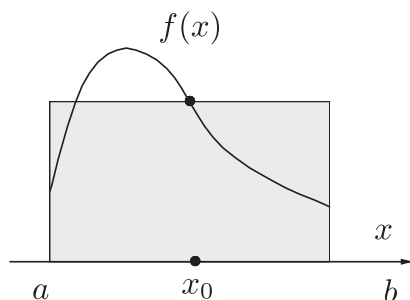
$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x_0)(\beta - \alpha)f(x_0) dx = 0.$$

Par conséquent

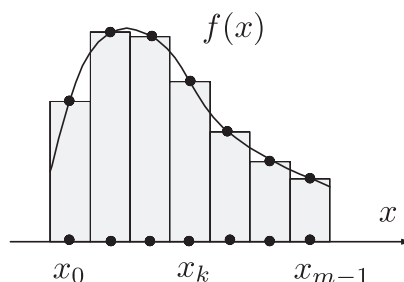
$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - (\beta - \alpha)f(x_0) \right| &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) dx \right| \\ &\leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)| dx \\ &\leq \frac{1}{2} \max_{[\alpha, \beta]} |f''(x)| \int_{\alpha}^{\beta} (x - x_0)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \max_{[\alpha, \beta]} |f''(x)| \left[\frac{1}{3}(x - x_0)^3 \right]_{\alpha}^{\beta} dx \\ &= \frac{1}{24} \max_{[\alpha, \beta]} |f''(x)| \cdot (\beta - \alpha)^3. \end{aligned}$$

La proposition s'en déduit en sommant sur $i = 1, \dots, n$. □

Pour augmenter la précision obtenue, on augmentera n , ce qui revient à passer à des subdivisions de plus en plus fines. Or, la précision n'augmente que très lentement : $\sim \frac{1}{n^2}$. Pour gagner deux bits de précision, il faut deux fois plus de travail.



La formule du point milieu (à gauche)



La formule composite du point milieu (à droite)

Exercice corrigé 4

Donner une approximation de l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^3}$, en utilisant la méthode du point milieu avec une erreur inférieure à 10^{-2} .

Déterminons dans un premier temps combien d'intervalles on doit découper l'intervalle de départ pour obtenir la précision demandée. D'après le théorème 3.26, si on utilise n sous-intervalles, pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, l'erreur est contrôlée par la formule

$$\left| \int_a^b f(t)dt - \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(a + (2i-1) \frac{b-a}{2n} \right) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \cdot \sup_{[a,b]} |f^{(2)}|.$$

Ici $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$, $f'(x) = -\frac{3x^2}{(1+x^3)^2}$ et

$$f''(x) = \frac{-6x(1+x^3)^2 + (3x^2)(2)(3x^2)(1+x^3)}{(1+x^3)^4},$$

de sorte que, pour $x \in [0, 1/2]$, on a l'estimation

$$|f''(x)| \leq 3(9/8)^2 + (3/4)(2)(3/4)(9/8) \leq 6.$$

On cherche n satisfaisant

$$\frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{24n^2} \cdot 6 < \frac{1}{100}.$$

On doit avoir $32n^2 > 100$. Il suffit de prendre $n = 2$. Appliquant maintenant la formule du point milieu avec $n = 2$, on aboutit à

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^3} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + (\frac{1}{8})^3} + \frac{1}{1 + (\frac{3}{8})^3} \right) = 0,4869 \dots$$

3.5.3 Méthode composite des trapèzes

La stratégie consiste donc à décomposer l'intervalle où l'on doit faire l'intégration, soit $[a, b]$, en n sous-intervalles de longueur

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Les différents points engendrés sont notés x_i pour $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Les valeurs aux extrémités sont $a = x_0$ et $b = x_n$. Ceci donne la méthode composite.

De façon plus précise, subdivisons donc l'intervalle $[a, b]$ en N sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ de largeur égale à $h = (b-a)/N$ à l'aide de $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$.

D'après les propriétés de l'intégrales,

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx.$$

Cela permet d'approximer l'intégrale de la fonction f morceau par morceau. On peut alors utiliser la méthode du trapèze simple sur chaque sous-intervalle. Ainsi

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1})) \\ &= \frac{h}{2} (f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \dots \\ &\quad + 2f(a+(N-1)h) + f(b)) \\ &= \frac{h}{2} ([f(x_0) + f(x_1)] + [f(x_1) + f(x_2)] + \dots \\ &\quad + [f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})] + [f(x_{n-1}) + f(x_n)]). \end{aligned}$$

On remarque que tous les termes $f(x_i)$ sont répétés deux fois, sauf le premier et le dernier. On en conclut que

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx \frac{h}{2} (f(x_0) + 2[f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})] \\ &\quad + f(x_n)), \end{aligned}$$

qui est la formule composite du trapèze. Pour évaluer l'erreur globale, rappelons que l'erreur locale dans chaque sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est

$$R_1 = -\frac{1}{12}h^3 f''(\xi_i), \quad \xi_i \in (x_i, x_{i+1}).$$

L'erreur composite est donc

$$\begin{aligned} R_T^C &= -\frac{1}{12}h^3 \left\{ f^{(2)}(\xi_0) + f^{(2)}(\xi_1) + f^{(2)}(\xi_2) + \dots + f^{(2)}(\xi_{n-1}) \right\} \\ &= -\frac{1}{12}h^3 \sum_{i=1}^n f^{(2)}(\xi_i), \end{aligned} \tag{3.68}$$

avec ξ_i tel que $x_i < \xi_i < x_{i+1}$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Considérons

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f^{(2)}(\xi_i)$$

Supposons f'' continue sur $[a, b]$ et qu'on a $\forall x \in [a, b]$

$$m \leq f''(x) \leq M.$$

Alors, en est-il de même pour μ ? (pourquoi)

$$m \leq \mu \leq M$$

qui est une valeur intermédiaire de f'' . Par continuité de f'' , on peut trouver (théorème des valeurs intermédiaires, voir en annexe), $\xi \in [a, b]$ tel que

$$\mu = f''(\xi)$$

ou encore, sous ces hypothèses

$$\sum_{i=1}^n f''(\xi_i) = n f''(\xi). \quad (3.69)$$

En reportant (3.69) dans (3.68) on obtient finalement,

$$\begin{aligned} \exists \xi \in]a, b[\\ R_n(f) = -\frac{nh^3}{12} f''(\xi), \end{aligned} \quad (3.70)$$

Or, n est égal à $(b-a)/h$. Donc,

$$R_n(f) = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\xi), \quad (3.71)$$

avec $a < \xi < b$. On peut aussi écrire l'égalité (3.71) sous la forme

$$R_n(f) = O(h^2), \quad (3.72)$$

d'où l'on déduit que la méthode composite du trapèze est donc d'ordre h^2 , c'est à dire qu'elle tend vers zéro à la même vitesse que h^2 . Ceci nous conduit au résultat suivant :

Théorème 3.27. (Méthode composite du trapèze)

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$, $h = (b-a)/n$ et $x_i = a + ih$, pour $i = 0, 1, \dots, n$. Alors, il existe un $\xi \in]a, b[$ pour lequel, la méthode composite du trapèze, pour n sous-intervalles, peut s'écrire avec son erreur d'intégration, sous la forme

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right] - \frac{b-a}{12} h^2 f^{(2)}(\xi).$$

Dans

$$T_n(f) := \frac{h}{2} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(a + ih) \right]$$

tout terme apparaît deux fois, à l'exception des termes $\frac{h}{2}f(a)$ et $\frac{h}{2}f(b)$ aux extrémités.

Exemple 15.

Avec l'intégrale de l'exercice 13, et la méthode du trapèze, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \cos x dx &\approx \frac{\pi/2}{1 \times 10} \left(\cos 0 + 2 \cos \frac{\pi}{20} + \dots + 2 \cos \frac{9\pi}{20} + \cos \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{40} [1 + 2(0,9877 + 0,9511 + \dots + 0,1564 + 0)] \approx 0,9979.\end{aligned}$$

La réponse est exacte à 0, 2% près, résultat plus précis que dans la méthode du rectangle de l'exercice 13.

Exemple 16.

Reprenons les calculs de l'exemple 5 et évaluons numériquement $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$, dont la valeur exacte est 1, mais cette fois-ci avec la méthode composite des trapèzes. Soit d'abord 4 intervalles de longueur

$$h = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{4} = \frac{\pi}{8}$$

La méthode composite des trapèzes donne :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin x dx &\approx \frac{\pi}{8} \cdot \frac{1}{2} \left(\sin 0 + 2 \left[\sin \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{8} \right] + \sin \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{4} = 0,9871158\end{aligned}$$

soit une erreur absolue d'environ 0,012 88 par rapport à la solution exacte donnant une amélioration nette en comparaison avec le résultat obtenu sur un seul intervalle. Sur 8 intervalles, la valeur de h est égale à $\frac{\pi}{16}$ et l'on a

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin x dx &\approx \frac{\pi}{16} \cdot \frac{1}{2} \left(\sin 0 + 2 \left[\sin \frac{\pi}{16} + \sin \frac{\pi}{8} + \sin \frac{3\pi}{16} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{5\pi}{16} + \sin \frac{3\pi}{8} + \sin \frac{7\pi}{16} \right] + \sin \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 0,99967852.\end{aligned}$$

L'erreur absolue a été réduite de 0,032. Cette erreur absolue est environ 4 fois plus petite que l'erreur obtenue avec 4 intervalles, confirmant que la méthode est d'ordre 2.

Exercice corrigé 5

Calculer la valeur de l'intégrale I ci-dessous en utilisant la formule composite du trapèze avec

$$I = \int_0^2 e^x dx$$

avec 1, 2, 4 et 8 sous-intervalles.

Pour la formule composite du trapèze, on obtient :

$$\begin{aligned}
* \quad n = 1 & \quad \frac{1}{2}(2) \{f(0) + f(2)\} = 8,389\,056\,1 \\
* \quad n = 2 & \quad \frac{1}{2}(1) \{f(0) + f(2) + 2f(1)\} = 6,912\,809\,9 \\
* \quad n = 4 & \quad \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) \left\{ f(0) + f(2) + 2 \left[f \left(\frac{1}{2} \right) + f(1) + f \left(\frac{3}{2} \right) \right] \right\} = 6,521\,610\,1 \\
* \quad n = 8 & \quad \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \right) \{f(0) + f(2) \\
& \quad + 2 \left\{ f \left(\frac{1}{4} \right) + f \left(\frac{1}{2} \right) + f \left(\frac{3}{4} \right) + f(1) + f \left(\frac{5}{4} \right) + f \left(\frac{3}{2} \right) + f \left(\frac{7}{4} \right) \right\} \\
& = 6,422\,297\,8
\end{aligned}$$

La valeur exacte de cette intégrale est 6,389 056 1 et les erreurs correspondantes sont $-2\,000\,000\,0$, $-0,523\,753\,8$, $0,132\,554\,0$ et $0,033\,241\,7$, respectivement, ce qui diminuent par un facteur d'environ quatre à chaque étape.

Majoration de l'erreur dans la méthode composite du trapèze

Proposition 3.28.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et $T_n(f)$ la valeur approchée de l'intégrale obtenue par la méthode du trapèze. Alors, on a :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T_n(f) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \max_{[a,b]} |f''|.$$

Preuve. D'après (3.36) et (3.37), on sait que si $f : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Alors, il existe un $\xi \in [x_0, x_1]$ tel que

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{x_1 - x_0}{2} [f(x_0) + f(x_1)] - \frac{(x_1 - x_0)^3}{12} f''(\xi).$$

Ainsi sur chaque sous-intervalle, on a

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{a+(i-1)h}^{a+ih} f(x) dx - \frac{1}{2} (f(a + (i-1)h) - f(a + ih)) \right| \\
& \leq \frac{h^3}{12} \max |f''|.
\end{aligned}$$

Le théorème s'en déduit en sommant sur $i = 1, \dots, n$.

On peut aussi remarquer que le changement de variable

$$s = \frac{x - x_0}{h},$$

permet d'obtenir $(x - x_i) = (s - i)h$ et $dx = hds$, si bien que le terme d'erreur devient alors

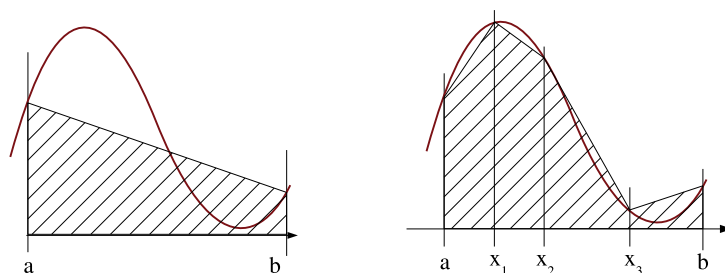
$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{f''(\xi(x))}{2!} (x - x_0)(x - x_1) dx = \int_0^1 \frac{f''(\xi(s))}{2!} s(s-1)h^3 ds.$$

En appliquant le théorème de la moyenne, on aboutit à

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{f''(\xi(s))}{2!} s(s-1) h^3 ds &= \frac{f''(\xi)}{2!} h^3 \int_0^1 s(s-1) ds \\ &= -\frac{f''(\xi)}{12} h^3.\end{aligned}$$

La méthode du trapèze se résume donc à l'égalité :

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_1)) - \frac{f''(\xi)}{12} h^3, \quad \xi \in [x_0, x_1].$$



Formule des trapèzes et formule composée des trapèzes

Exercice corrigé 6

Bonus

Soit f la fonction de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \sqrt{3 + \cos^2 x}$$

et l'intégrale I telle que

$$I = \int_0^{\pi/2} f(x) dx.$$

- (a) Sachant que l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$ est subdivisé en 15 sous-intervalles de même étendue (pas), calculer une valeur approchée de I , par la méthode des trapèzes.
- (b) Donner une majoration de l'erreur $R(f)$, de la méthode utilisée. On rappelle que
- $$|R(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

- (a) Soit J , cette valeur approchée

$$\begin{aligned}J &= \frac{\pi}{30} \left[\frac{1}{2} \left[f(0) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] + \sum_{k=1}^{14} f(x_k) \right], \quad x_k = \frac{k\pi}{30} \\ J &= 2,70130.\end{aligned}$$

- (b) Un calcul élémentaire donne

$$f'(x) = -\frac{\sin 2x}{\sqrt{3 + \cos 2x}}.$$

Posons $U(x) = 3 + \cos 2x$; il vient pour $f''(x)$:

$$f'(x) = - \left[U(x)^{-1/2} \right] \left(U(x) - \frac{8}{U(x)} \right).$$

Une étude sommaire de g telle que

$$g(x) = U(x) - \frac{8}{U(x)},$$

montre que les extréma ont lieu pour $x = 0$ ou $x = \pi$; dans ces conditions, on a

$$|g(0)| = |g(\pi)| = 2.$$

et comme sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a

$$\inf \left(U(x)^{1/2} \right) = 2^{1/2} = 1,414 \dots \text{ et que } \sup |f''(x)| = \sqrt{2},$$

alors $|E|$ est au plus égal à 0,002. Dans ces conditions, on peut conclure que :

$$2,699 \leq I \leq 2,704.$$

$\frac{2x}{\pi}$	0	1/15	2/15	3/15	4/15	5/15	6/15	7/15
$f(x)$	2	1,99453	1,97827	1,95167	1,91550	1,87083	1,81907	1,76197

$\frac{2x}{\pi}$	8/15	9/15	10/15	11/15	12/15	13/15	14/15	1
$f(x)$	1,70161	1,64042	1,58114	1,52672	1,48020	1,44446	1,42192	1,41421

Dans l'équation (3.71), on voit immédiatement que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f) = 0,$$

d'où le résultat de convergence suivant :

Théorème 3.29.

Si f est deux fois continument différentiable sur $[a, b]$ alors la méthode composite des trapèzes est convergente sur $\mathcal{C}^2([a, b])$.

Pour la méthode des trapèzes, on voit que

$$A_0^{(n)} = A_n^{(n)} = \frac{h}{2}, \quad \text{et} \quad A_i^{(n)} = h, \quad \text{pour } i = 1, \dots, n-1$$

et par conséquent $A_i^{(n)} > 0 \quad \forall i$ et $\sum_{i=0}^n A_i^{(n)} = nh = b - a$ d'où d'après le théorème 3.20 :

Théorème 3.30.

La méthode composite des trapèzes est stable.

Détermination du nombre de subdivisions

Ecrivons donc la formule de méthode des trapèzes sous sa forme originelle

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^b P_1(x) + \int_a^b E(x)dx \\ &\equiv I_T(f) + R_T(f).\end{aligned}\tag{3.73}$$

Pour $a = x_0$ et $b = x_1$, on obtient

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) - \frac{h^3}{12}f''(\xi),\tag{3.74}$$

où $\xi \in [x_0, x_1]$, $h = (b - a)$. Utilisons la notation $T_n(f)$ pour réécrire (3.74) :

$$\int_a^b f(x)dx = T_n(f) + O(h^2),\tag{3.75}$$

et lorsque n croît, h tend vers zéro, de sorte que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(f) = \int_a^b f(x)dx,\tag{3.76}$$

relation montrant la convergence de la méthode des trapèzes vers l'intégrale. Pratiquement, on peut se demander comment déterminer le nombre de sous-intervalle de l'intervalle d'intégration tel que

$$\left| \int_a^b f(x)dx - T_n(f) \right| \leq \varepsilon,$$

où ε est un seuil d'erreur fixé d'avance. Revenons à (3.71). On a $h = \frac{b-a}{n}$. Supposons que $|f'(x)| \leq M_2$ sur $[a, b]$. On obtient

$$|R_n(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2.$$

D'où, dès que

$$n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3 M_2}{12\varepsilon}}\tag{3.77}$$

on a

$$\left| \int_a^b f(x)dx - T_n(f) \right| = |R_n(f)| \leq \varepsilon,$$

ou encore

$$\int_a^b f(x)dx = T_n \pm \varepsilon.$$

Exemple 17.

Quel $T_n(f)$ choisir pour avoir une erreur inférieure à $0,5 \times 10^{-3}$ en utilisant une quadrature composite du trapèze sur

$$\int_{-200}^{200} (3x+7)dx?$$

On a $\varepsilon = 0,5 \times 10^{-3}$. Mais, la deuxième dérivée de $f(x) = 3x+7$ est identiquement nulle, donc par (3.71), pour n'importe lequel n , l'erreur est nulle. La méthode simple

du trapèze suffit. Géométriquement, on voit que la méthode du trapèze est exacte sur la droite (ou polynôme de degré 1).

Exemple 18.

Répondons à la même question que dans l'exemple 17 pour

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, dx.$$

On a $\varepsilon = 0,5 \times 10^{-3}$ sur $[-\pi, \pi]$.

$$|f''(x)| = |-\cos x| \leq 1.$$

D'où par (3.71), avec $M_2 = 1$, on doit calculer $T_n(f)$ avec

$$n \geq \sqrt{\frac{(2\pi)^3 \times 1}{12 \times 0,5 \times 10^{-3}}} = 203,3 \dots$$

On obtient finalement que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, dx = \int_{\pi}^{\pi} T_{204}(f) \pm 0,5 \times 10^{-3}.$$

Il est à noter que la principale difficulté de l'utilisation de (3.77) est le calcul de M_2 , c'est à dire la difficulté de trouver les plus petites majorations possibles pour des fonctions.

Dans le cas où f est complexe, on peut utiliser (3.71) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} |R_{T_n}(f)| &= \frac{(b-a)^3}{12n^2} |f''(\xi_1)|, \\ |R_{T_{3n}}(f)| &= \frac{(b-a)^3}{12 \times 9n^2} |f''(\xi_2)|, \end{aligned}$$

où ξ_1 et ξ_2 sont encore entre a et b . Ainsi, si f' ne varie pas beaucoup, en triplant le nombre de nœuds, on divise l'erreur possiblement par un facteur 9, ajoutant peut-être un chiffre significatif de plus à la précision.

3.5.4 Méthode composite de Simpson 1/3

Choisissons un entier n pair. Subdivisons l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalle et appliquons la méthode de Simpson simple, c'est à dire (3.52) sur chacun des sous-intervalles pairs consécutifs. Plus précisément, on prend ces intervalles deux par deux (ce qui suppose N pair), on peut appliquer à chacun de ces blocs la formule de Simpson 1/3 simple.² Alors

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \, dx &= \sum_{i=0}^{N/2-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x) \, dx \\ &\approx \sum_{i=0}^{N/2-1} \frac{h}{3} f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2}), \end{aligned}$$

²Cette terminologie est due au facteur $\frac{1}{3}$ qui multiplie h .

ou encore

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \frac{h}{3}(f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + \dots + 4f(a+(N-2)h) \\ &\quad + 2f(a+(N-1)h) + f(b))\end{aligned}$$

c'est à dire, en termes des x_i :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \frac{h}{3}((f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + (f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)) \\ &\quad + \dots (f(x_{2n-4}) + 4f(x_{2n-3}) + f(x_{2n-2})) \\ &\quad + f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})) \\ &= \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots \\ &\quad + 4f(x_{2n-3}) + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})).\end{aligned}$$

Tous les termes de rang impair sont multipliés par 4 tandis que ceux de rang pair sont multipliés par 2, sauf le premier $f(x_0)$ et le dernier $f(x_{2n})$. C'est la formule composite de Simpson-1/3. Nous venons de montrer le résultat suivant :

Théorème 3.31. (Méthode composite de Simpson)

Soit $f \in \mathcal{C}^4([a, b])$, $n = 2m$ un entier pair, $h = \frac{(b-a)}{2m}$ et $x_i = a + ih$, pour $i = 0, 1, \dots, 2m$. Alors, il existe un $\xi \in]a, b[$ pour lequel, la méthode composite de Simpson, pour n sous-intervalles, peut s'écrire avec son erreur d'intégration, sous la forme

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \frac{h}{3} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(a+2ih) + 4 \sum_{i=1}^{m-1} f(a+(2i-1)h) + f(b) \right] \\ &\quad - \frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\xi).\end{aligned}\tag{3.78}$$

Exemple 19.

Reprenons les calculs de l'exemple 5 et subdivisons l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ en 4 sous-intervalles de longueur $h = \frac{\pi}{8}$. On a

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx &\approx \frac{\pi}{8} \cdot \frac{1}{3} \left(\sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{8} + 2 \sin \frac{\pi}{4} + 4 \sin \frac{3\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 1,000\,1346,\end{aligned}$$

qui est une précision similaire à celle de la méthode des trapèzes pour un travail si gigantesque. Avec 8 sous-intervalles de longueur $\frac{\pi}{16}$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx &\approx \frac{\pi}{16} \cdot \frac{1}{3} \left(\sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{16} + 2 \sin \frac{\pi}{8} + 4 \sin \frac{3\pi}{16} \right. \\ &\quad \left. + 2 \sin \frac{\pi}{4} + 4 \sin \frac{5\pi}{16} + 2 \sin \frac{3\pi}{8} + 4 \sin \frac{7\pi}{16} + \sin \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 1,000\,008\,296.\end{aligned}$$

La grande précision obtenue vient du fait que cette méthode est d'ordre 4. On remarque qu'en passant de 4 à 8 intervalles (c'est à dire en divisant h par 2) on divise l'erreur par un facteur d'environ 16,22, ce qui confirme l'ordre 4 de la méthode.

Exemple 20.

On veut déterminer

$$I = \int_0^{\pi/2} f(x) dx$$

sur la base du tableau suivant :

x	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$
$f(x)$	0	0,382 683	0,707 107	0,923 880	1

- selon la formule du trapèze, on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} f(x) dx &\approx \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\pi}{8}(0 + 2 \times 0,382683 + 2 \times 0,707107 + 2 \times 0,923880 + 1) \\ &= 0,9877116 \end{aligned}$$

- selon la formule de Simpson, on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} f(x) dx &\approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4) \\ &= \frac{1}{3} \frac{\pi}{8}(0 + 4 \times 0,382683 + 2 \times 0,707107 + 4 \times 0,923880 + 1) \\ &= 1,0000135. \end{aligned}$$

Les points d'appui donnés sont des points d'appui de la fonction

$$f(x) = \sin x; \quad \text{on a } \int_0^{\pi/2} \sin x dx = 1.$$

On constate que l'approximation par la formule de Simpson est nettement meilleure que celle fournie par la formule des trapèzes.

Exercice corrigé 7

Supposons que nous ayons la table de fonction suivante :

$$\begin{aligned} f(0) &= 0,846; & f(0,4) &= 1,121; & f(0,8) &= 2,321; \\ f(0,1) &= 0,928; & f(0,5) &= 1,221; & f(0,9) &= 3,101; \\ f(0,2) &= 0,882; & f(0,6) &= 1,661; & f(1,0) &= 3,010; \\ f(0,3) &= 0,953; & f(0,7) &= 2,101. \end{aligned}$$

Evaluer l'intégrale $\int_0^1 f(x) dx$ par la méthode de Simpson.

Par la formule de Simpson, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx \approx & \frac{1}{30} [f(0) + 4f(0,1) + 2f(0,2) + 4f(0,3) + 2f(0,4) + 4f(0,5) \\ & + 2f(0,6) + 4f(0,7) + 2f(0,8) + 4f(0,9) + f(0,1)] \end{aligned}$$

En insérant les valeurs de f et en calculant avec une calculatrice, on obtient

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{30}(49,042) = 1,635.$$

Résultat qui devrait être tout à fait précis, à moins que la dérivée quatrième de f ne soit trop grande.

Exercice corrigé 8

Calculer la valeur de l'intégrale I ci-dessous en utilisant la formule de Simpson avec

$$I = \int_0^2 e^x dx$$

avec 1, 2, 4 et 8 sous-intervalles.

Formule de Simpson avec 2, 4 et 8 sous-intervalles, c'est à dire $n = 1, 2$ et 4.

* Pour $n = 1$: $h = \frac{b-a}{2n} = \frac{2-0}{2} = 1$; $x_0 = 0$, $x_1 = x_0 + 1 = 1$, $x_2 = 0 + 2 = 2$,

c'est à dire trois points : $\{x_0, x_1, x_2\}$, donc

$$\int_0^2 e^x dx \approx \frac{1}{3}(1) \{f(0) + f(2) + 4f(1)\} = 6,420\,727\,8$$

* $n = 2$: $h = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$; $x_i = x_0 + ih$;

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = x_0 + \frac{2}{2} = 1; x_3 = 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}; \quad x_4 = 0 + \frac{4}{2} = 2;$$

c'est à dire cinq points $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$ et donc

$$\begin{aligned} \int_0^2 e^x dx & \approx \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \left\{ f(0) + f(2) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + 2f(1) \right\} \\ & \approx 6,391\,2102. \end{aligned}$$

* $n = 4$: $h = \frac{2-0}{8} = \frac{1}{4}$; $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$; $x_2 = \frac{1}{2}$; $x_3 = \frac{3}{4}$;

$$x_4 = \frac{4}{4}; \quad x_5 = \frac{5}{4}; \quad x_6 = \frac{6}{4}; \quad x_7 = \frac{7}{4}; \quad x_8 = \frac{8}{4} = 2;$$

c'est à dire que neuf points $\{x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_8\}$, et donc

$$\begin{aligned} \int_0^2 e^x dx & \approx \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right) \left\{ f(0) + f(2) + 4 \left[f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right) \right] \right. \\ & \quad \left. + 2 \left[f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right) \right] \right\} = 6,389\,193\,7. \end{aligned}$$

Les erreurs correspondantes sont $-0,031\,671\,7$, $-0,002\,154\,1$ et $-0,0001376$, respectivement, ce qui diminuent par un facteur d'environ 16 à chaque étape. Notez que ces résultats sont plus précis que ceux obtenus utilisant la méthode composite du trapèze. L'inconvénient principal de la méthode composite de Simpson est qu'il ne peut être seulement utilisée que quand $[a, b]$ est divisé en de sous-intervalles pairs.

Exercice corrigé 9

Déterminer le nombre de sous-intervalles nécessaires et le pas h pour approchée l'intégrale $\int_0^\pi \sin x \, dx$ avec une erreur absolue inférieure à 0,00002, en utilisant la méthode composite de Simpson.

En posant $x_i = a + ih$, $n = 2m$, la méthode composite de Simpson donne

$$\int_0^\pi \sin x \, dx = \frac{h}{3} \left[2 \sum_{i=1}^{m-1} \sin(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^m \sin(x_{2i-1}) \right] - \frac{\pi h^4}{180} \sin \xi.$$

Puisque l'erreur absolue doit être inférieure à 0,00002, l'inégalité

$$\left| \frac{\pi h^4}{180} \sin \xi \right| \leq \frac{\pi h^4}{180} = \frac{\pi^5}{180 n^4} < 0,00002$$

est utilisée pour déterminer n et h . Un calcul simple donne $n \geq 18$. Si $n = 20$, alors $h = \pi/20$ et la formule donne

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin x \, dx &\approx \frac{\pi}{60} \left[2 \sum_{i=1}^9 \sin\left(\frac{i\pi}{10}\right) + 4 \sum_{i=1}^{10} \sin\left(\frac{(2i-1)\pi}{20}\right) \right] \\ &= 2,000006. \end{aligned}$$

Pour être sûr de ce degré d'exactitude, utilisons la formule composite du trapèze. Il vient

$$\left| \frac{\pi h^2}{12} \sin \xi \right| \leq \frac{\pi h^2}{12} = \frac{\pi^3}{12 n^2} < 0,00002,$$

ou encore $n \geq 360$. Puisque cela nécessite beaucoup plus de calculs pour la méthode composite de Simpson, nous n'utiliserons pas la méthode composite du trapèze pour statuer sur ce résultat de ce problème.

À des fins de comparaison, la méthode composite du trapèze, avec $n = 20$ et $h = \pi/20$ donne

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin x \, dx &\approx \frac{\pi}{40} \left[2 \sum_{i=1}^{19} \sin\left(\frac{i\pi}{20}\right) + \sin 0 + \sin \pi \right] \\ &= \frac{\pi}{40} \left[2 \sum_{i=1}^{19} \sin\left(\frac{i\pi}{20}\right) \right] = 1,9958860. \end{aligned}$$

La réponse exacte est de 2. Donc la méthode composite de Simpson avec $n = 20$ donne une réponse correcte dans le seuil de l'erreur désirée, et il est clair que la méthode composite du trapèze avec $n = 19$ ne la donne pas.

3.5.5 Méthode composite de Simpson 3/8

On peut aussi déterminer la formule à 4 points qui est aussi exacte pour les polynômes de degré 3. Cette formule s'appelle aussi Simpson 3/8 à cause des coefficients du développement. On prend cette fois-ci des blocs de trois sous-intervalles à la fois, et on obtient la formule suivante :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{3i}}^{x_{3i+3}} f(x)dx \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{3h}{8} (f(x_{3i}) + 3f(x_{3i+1}) + 3f(x_{3i+2}) + f(x_{3i+3}))\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\approx \frac{3h}{8} (f(a) + 3f(a+h) + 3f(a+2h) + 2f(a+3h) \\ &\quad + 3f(a+4h) + 3f(a+5h) + 2f(a+6h) + \dots \\ &\quad + 2f(a+(N-3)h) + 3f(a+(N-2)h) + 3f(a+(N-1)h) + f(b))\end{aligned}$$

avec $h = (b-a)/N$ et $N/3$ entier, ou encore

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \frac{3h}{8} (f(x_{3i}) + 3f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_3) + 3f(x_4) + \dots \\ &\quad + f(x_{3n-3}) + 3f(x_{3n-2}) + 3f(x_{3n-1}) + f(x_{3n})).\end{aligned}$$

L'erreur globale est

$$R_S = -\frac{(b-a)}{80} h^4 f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in]a, b[.$$

Cette méthode a le même degré de précision, 3, et le même ordre de convergence, 4, que la méthode de Simpson 1/3. La méthode de Simpson est donc de deux ordres de grandeur plus efficace que la méthode des trapèzes

Majoration de l'erreur dans la formule composite de Simpson

Cherchons maintenant l'erreur pour la quadrature composite de Simpson sur l'intervalle $[a, b]$. Pour calculer cette erreur, posons

$$x_0 = a, \quad x_{2m} = b, \quad \text{et} \quad h = \frac{b-a}{2m}.$$

Il vient (En se souvenant que $m = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, c'est à dire partie entière de $\frac{n}{2}$)

$$\begin{aligned}\int_0^{x_{2m}} f(x)dx &= \sum_{i=1}^m \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx \\ &= \sum_{i=1}^m \left[\frac{h}{3} (f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})) - \frac{h^{(5)}}{90} f^{(4)}(\xi_i) \right],\end{aligned}$$

où $\xi_i \in [x_{2i-2}, x_{2i}]$. D'où

$$\begin{aligned}
\int_0^{x_{2m}} f(x) dx &= \sum_{i=1}^m \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x) dx \\
&= \left[\frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 4f(x_{2m-1}) \right. \\
&\quad \left. + f(x_{2m})) \right] + \frac{h^5}{90} \sum_{i=1}^m f^{(4)}(\xi_i) \\
&\equiv I_{S_{2m}}(f) + R_{S_{2m}}(f)
\end{aligned} \tag{3.79}$$

où nous avons noté

$$\begin{aligned}
I_{S_{2m}}(f) &= \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 4f(x_{2m-1}) + f(x_{2m})) \\
R_{S_{2m}}(f) &= - \frac{h^5}{90} \sum_{i=1}^m f^{(4)}(\xi_i), \quad (\text{l'erreur de } I_{S_{2m}})(f).
\end{aligned} \tag{3.80}$$

De la même façon que pour la quadrature du trapèze, on suppose la continuité de $f^{(4)}(x)$ pour obtenir

$$R_{S_{2m}}(f) = - \frac{1}{90} m h^5 f^{(4)}(\xi), \tag{3.81}$$

avec $\xi \in [x_0, x_{2m}] \equiv [a, b]$.

En se souvenant d'autre part que $h = \frac{b-a}{2m}$ ou $m = \frac{b-a}{2h}$ et en supposant que $f^{(4)}(x)$ est bornée sur $[a, b]$, on a finalement

$$R_{S_{2m}}(f) = - \frac{(b-a)}{180} m h^4 f^{(4)}(\xi) = O(h^4). \tag{3.82}$$

On peut donc écrire pour (3.79)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_{S_{2m}}(f) = \int_a^b f(x) dx. \tag{3.83}$$

On peut utiliser (3.81) afin de déterminer le nombre de subdivisions (pair) de $[a, b]$ nécessaires pour que la quadrature de Simpson composite associée approche l'intégrale à un seuil d'erreur de ϵ donné.

On a $h = \frac{b-a}{n}$. Supposons que $|f^{(4)}(x)| \leq M_4$ sur $[a, b]$. On peut transformer (3.81) et obtenir

$$|R_{S_{2m}}(f)| \leq \frac{(b-a)^5 M_4}{180 (2m)^4}.$$

Pour simplifier, si on pose $2m = n$, n est pair, on écrit :

$$|R_{S_{2m}}(f)| \leq \frac{(b-a)^5 M_4}{180 n^4}. \tag{3.84}$$

D'où, si ϵ est le seuil d'erreur qu'on veut atteindre, dès que

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 M_4}{180 \epsilon}}, \quad n \text{ pair}, \tag{3.85}$$

$$|R_{S_{2m}}(f)| \leq \epsilon$$

ce qui est équivalent à la relation suivante :

$$\int_a^b f(x)dx = I_{S_n}(f) \pm \epsilon.$$

Exemple 21.

Répondons à la même question que dans l'exemple 18 pour

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, dx$$

avec une quadrature composite de Simpson.

On a $\epsilon = 0,5 \times 10^{-3}$ sur $J = [-\pi, \pi]$ et

$$|f^{(4)}(x)| = |\cos^{(4)} x| \leq 1, \quad \text{sur } J.$$

La formule (3.85) donne alors

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{(2\pi)^5}{180 \times 0,5 \times 10^{-3}}} \approx 18,16. \quad (3.86)$$

Comme n doit être pair, il suffit de prendre 20 sous-intervalle de $[-\pi, \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, dx = \int_{\pi}^{\pi} I_{20}(f) \pm 0,5 \times 10^{-3}.$$

Ici $I_{S_{20}}$ donne la même précision que $I_{T_{240}}$.

Comme dans le cas du trapèze, lorsque f est complexe, on peut utiliser (3.84) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} |R_{S_n}(f)| &= \frac{(b-a)^5}{180n^4} |f^{(4)}(\xi_1)|, \\ |R_{S_{2n}}(f)| &= \frac{(b-a)^5}{180 \times 16n^4} |f^{(4)}(\xi_2)|, \end{aligned}$$

où ξ_1 et ξ_2 sont encore entre a et b . On voit immédiatement que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f) = 0,$$

d'où le résultat de convergence suivant

Théorème 3.32.

Si f est quatre continument différentiable sur $[a, b]$ alors la méthode composite de Simpson est convergente sur $\mathcal{C}^4([a, b])$.

Pour la méthode de Simpson, on voit que

$$A_0^{(n)} = A_n^{(n)} = \frac{h}{3}, \quad \text{et} \quad A_{2i+1}^{(n)} = \frac{4h}{3}, \quad \text{pour} \quad i = 0, \dots, \frac{n}{2} - 1 \quad \text{et que}$$

$$A_{2i}^{(n)} = \frac{2h}{3} \text{ pour } i = 0, \dots, \frac{n}{2} - 1.$$

et par conséquent $A_i^{(n)} > 0 \quad \forall i$ et

$$\sum_{i=0}^n A_i^{(n)} = \frac{2h}{3} + \frac{n}{2} \frac{4h}{3} + \left(\frac{n}{2} - 1\right) \frac{2h}{3} = b - a,$$

d'où d'après le théorème 3.20 :

Théorème 3.33.

La méthode composite de Simpson est stable.

Remarque 10.

La condition $\sum_{i=0}^n A_i^{(n)} = b - a$ entraîne la convergence de la méthode composite de Simpson sur $\mathcal{C}^\infty([a, b])$, car la première condition du théorème 3.21 est vérifiée.

La condition $\sum_{i=0}^n A_i^{(n)} = b - a$ exprime simplement le fait que la méthode de quadrature est exacte pour $f(x) = 1$. En effet

$$\int_a^b dx = b - a \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^n A_i^{(n)} f(x_i) = \sum_{i=0}^n A_i^{(n)} = b - a.$$

Exercice corrigé 10

Bonus

- (a) On souhaite approcher l'intégrale $\int_2^4 \exp(-x^2) dx$, par la méthode du trapèze. Combien de sous-intervalles faut-il utiliser pour commettre une erreur inférieure ou égale à 10^{-5} .
- (b) Répondre à la même question en utilisant la méthode de Simpson.

- (a) Soit $f(x) = e^{-x^2}$, $a = 2$ et $b = 4$.

L'erreur commise en subdivisant en n sous-intervalles est majorée par : $\frac{(b-a)}{12} M_2 h^2$, où M_2 est le maximum de $|f''(x)|$ sur $[a, b]$. On a

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} \quad \text{et} \quad f''(x) = -2e^{-x^2} + 4xe^{-x^2} = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}.$$

D'autre part

$$f^{(3)}(x) = (12x - 8x^3)e^{-x^2} = 4x(3 - 2x^2)e^{-x^2} < 0 \quad \text{sur} \quad [2, 4]$$

et donc $f''(x) > 0$ sur $[0, 4]$, si bien que $|f''(x)| = f''(x) \leq f''(2) = 14e^{-4} = M_2$, de sorte que l'erreur est au plus

$$\frac{b-a}{12} M_2 h^2 = \frac{1}{6} \times 14e^{-4} h^2.$$

Pour rendre cette dernière plus petite à 10^{-6} , il faut choisir h telle que

$$\begin{aligned}\frac{1}{6} \times 14e^{-4}h^2 &< 10^{-6}, \\ h^2 &< e^4 10^{-6} \cdot \frac{3}{7} = 0,000234, \\ h &< 0,0048.\end{aligned}$$

c'est à dire que nous devons prendre $n = \frac{b-a}{h} = 416$ subdivisions.

- (b) Pour la méthode de Simpson, l'erreur globale ne peut donc dépasser : $\frac{(b-a)}{180}M_4h^4$.
On a

$$f^{(3)}(x) = 4(4x^4 - 12x^2 + 3)e^{-x^2}.$$

Sur $[2, 4]$, on trouve que $x \mapsto 4x^4 - 12x^2 + 3$ est croissante et $x \mapsto e^{-x^2}$ décroissante, donc

$$|f^{(3)}(x)| \leq 4(4 \times 4^4 - 12 \times 4^2 + 3)e^{-4} = 61,17 = M_4.$$

On déduit alors que

$$\frac{b-a}{180}M_4h^4 = \frac{1}{90} \times 61,17h^2 = 0,68h^2.$$

Donc, si nous voulons une erreur inférieure à 10^{-6} , il suffit d'avoir

$$\begin{aligned}0,68h^2 &< 10^{-6}, \\ h &< 0,0012.\end{aligned}$$

c'est à dire que nous devons prendre $n = \frac{b-a}{h} = 57$ subdivisions.

Exercice corrigé 11

Bonus

Utiliser la méthode composite du trapèze, avec les valeurs de n indiquées pour approximer les intégrales suivantes :

1. (a) $\int_1^2 x \ln x \, dx, \quad n = 4;$ $\int_0^2 e^{2x} \sin 3x \, dx, \quad n = 8$
- (b) $\int_{-2}^2 x^3 e^x \, dx, \quad n = 4;$ $\int_1^3 \frac{2dx}{x^2 - 4}, \quad n = 8$
- (c) $\int_0^2 \frac{2 \, dx}{x^2 + 4}, \quad n = 6;$ $\int_3^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}}, \quad n = 8$
- (d) $\int_0^\pi x^2 \cos x \, dx, \quad n = 6$ $\int_0^{3\pi/8} \tan 2x \, dx, \quad n = 8.$

2. Refaire les mêmes calculs en utilisant la méthode composite du point milieu avec $(n+2)$ sous-intervalles.

1. Approximation avec la formule composite du trapèze.

- (a) Ici avec $h = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$ et $x_0 = 1$, $x_1 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$; $x_2 = 1 + \frac{2}{4} = \frac{6}{4}$,
 $x_3 = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$, $x_4 = 1 + \frac{4}{4} = 2$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_1^2 x \ln x \, dx &\approx \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \left[f(x_0) + f(x_4) + 2 \sum_{j=1}^3 f(x_j) \right] \\ &= \frac{1}{8} [f(x_0) + f(x_4) + 2 \{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\}] \\ &= \frac{1}{8} [f(1) + f(2) + f(5/4) + f(3/2) + f(7/4)] \\ &= \frac{1}{8} [0 + 2 \ln 2 + (5/4) \ln(5/4) + (3/2) \ln(3/2) + (7/4) \ln(7/4)] \\ &\approx 0,639900 \end{aligned}$$

- (b) Le même procédé pour la méthode du trapèze conduit à :

$$\begin{aligned} \int_0^2 e^{2x} \sin 3x \, dx &\approx -13,5760; & \int_{-2}^2 x^3 e^3 \, dx &\approx 31,3653; \\ \int_1^3 \frac{2dx}{x^2-4} &\approx 0,476977; & \int_0^2 \frac{2dx}{x^2+4} &\approx 0,784241; \\ \int_3^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} &\approx 0,605498; & \int_0^\pi x^2 \cos x \, dx &\approx -6,42872; \\ \int_0^{3\pi/8} \tan 2x \, dx &\approx 0,970926. \end{aligned}$$

2. Pour la méthode composite du point milieu, en utilisant le théorème 3.25 et en posant

$$\begin{aligned} h &= \frac{2-1}{4+2} = \frac{1}{6}, \text{ avec } x_{-1} = a = 1, \quad x_0 = a + h = 1 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}; \quad x_1 = 1 + \frac{2}{6} = \frac{8}{6}; \\ x_2 &= \frac{9}{6}; \quad x_3 = \frac{10}{6}, \quad x_4 = \frac{11}{6}; \quad x_5 = \frac{12}{6}; \quad x_6 = \frac{13}{6}, \text{ on obtient :} \end{aligned}$$

- (a) pour la valeur approchée de la première intégrale (avec $n = 4$) :

$$\begin{aligned} \int_1^2 x \ln x \, dx &\approx 2 \left(\frac{1}{6} \right) [f(x_0) + f(x_2) + f(x_4)] \\ &= \frac{2}{3} [f(7/6) + f(9/6) + f(11/6)] \\ &= \frac{2}{3} [(7/6) \ln(7/6) + (9/6) \ln(9/6) + (11/6) \ln(11/6)] \approx 0,633096. \end{aligned}$$

- (b) pour la deuxième intégrale, avec $h = \frac{2 - (-2)}{6} = \frac{2}{3}$ et

$$x_{-1} = a = -2, \quad x_0 = a + h = -2 + \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}; \quad x_1 = -2 + \frac{4}{3} = -\frac{2}{3};$$

$$x_2 = -2 + \frac{6}{3} = 0; \quad x_3 = \frac{2}{3}, \quad x_4 = \frac{4}{3}; \quad x_5 = \frac{6}{3}; \quad x_6 = \frac{8}{3},$$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 x^3 e^x dx &\approx \frac{4}{3} [f(-4/3) + f(0) + f(4/3)] \\ &= \frac{4}{3} [(-4/3) e^{-4/3} + 0 + (4/3)^3 e^{4/3}] \\ &= 11,1568. \end{aligned}$$

- (c) Pour les autres intégrales, les mêmes calculs conduisent avec la méthode composite du point milieu aux résultats suivants :

$$\int_0^2 e^{2x} \sin 3x dx \approx -14,9985; \quad \int_1^3 \frac{2dx}{x^2 - 4} \approx 0,478751$$

$$\int_0^2 \frac{2 dx}{x^2 + 4} \approx 0,786700; \quad \int_3^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}} \approx 0,602961$$

$$\int_0^\pi x^2 \cos x dx \approx -6,11274 \quad \int_0^{3\pi/8} \tan 2x dx \approx 0,947868.$$

Exercice corrigé 12

1. Déterminer les valeurs de n et h requises pour approximer à 10^{-5} les intégrales

$$I_1 = \int_2^2 e^{2x} \sin 3x dx, \quad \text{et} \quad I_2 = \int_1^2 \frac{dx}{x+4},$$

par :

- (a) la méthode composite du trapèze;
- (b) la méthode composite de Simpson;
- (c) la méthode composite du point milieu.

Calculer l'approximation pour l'intégrale I_2 .

2. Soit f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & 0 \leq x \leq 0,1 \\ 1,001 + 0,03(x - 0,1) + 0,3(x - 0,1)^2 + 2(x - 0,1)^3, & 0 \leq x \leq 0,2 \\ 1,009 + 0,15(x - 0,2) + 0,9(x - 0,2)^2 + 2(x - 0,2)^3, & 0 \leq x \leq 0,3. \end{cases}$$

- (a) Etudier la continuité de f .
- (b) Utiliser la méthode composite du trapèze avec $n = 6$ pour approximer l'intégrale $\int_0^{0,3} f(x) dx$.
- (c) Utiliser la méthode composite de Simpson avec $n = 6$ pour approximer l'intégrale $\int_0^{0,3} f(x) dx$. Les résultats sont-ils plus précis que dans la question (b) ?

1. En utilisant la même méthode que dans l'exercice 9, on obtient :

- Pour l'intégrale I_1 :

(a) par la méthode composite du trapèze :

$$h < 0,000922295 \quad \text{et} \quad n \geq 2168;$$

(b) par la méthode composite de Simpson :

$$h < 0,037658 \quad \text{et} \quad n \geq 54;$$

(c) par la méthode composite du point milieu :

$$h < 0,00065216 \quad \text{et} \quad n \geq 3066.$$

- Pour l'intégrale I_2 :

(a) par la méthode composite du trapèze :

$$h < 0,04382 \quad \text{et} \quad n \geq 46; \quad I_2 \approx 0,405471;$$

(b) par la méthode composite de Simpson :

$$h < 0,044267 \quad \text{et} \quad n \geq 6; \quad I_2 \approx 0,405466;$$

(c) par la méthode composite du point milieu.

$$h < 0,03098 \quad \text{et} \quad n \geq 64; \quad I_2 \approx 0,405460.$$

2. (a) Continuité de f : Comme les limites à gauche et à droite en 0,1 et 0,2 pour f , f' et f'' existent et sont égales, il y a continuité sur $[0; 3]$. Néanmoins,

$$f^{(3)}(x) = \begin{cases} 6, & 0 \leq x \leq 0,1 \\ 12, & 0 \leq x \leq 0,2 \\ 12, & 0 \leq x \leq 0,3. \end{cases}$$

est discontinues en $x = 0,1$.

(b) Méthode composite du trapèze avec $n = 6$ pour approximer l'intégrale

$$\int_0^{0,3} f(x) dx : \text{on obtient :}$$

$$0,302506 \text{ avec une borne de l'erreur égale à } 1,9 \times 10^{-4}.$$

(c) On obtient 0,302425 et la valeur effective de l'intégrale est la même.

Exercice corrigé 13

★

On peut montrer que l'erreur $R_S(f)$ de la méthode composite de Simpson peut être approximée par

$$R_S(f) = -\frac{h^4}{180} [f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)].$$

Indication : montrer que $\sum_{j=1}^m f^{(4)}(\xi_j)$ est une somme de Riemann pour $\int_a^b f^{(4)}(x) dx$, avec $m = 2n$.

(a) Dédurre une estimation de $R_T(f)$ de la méthode composite du trapèze utilisant la méthode précédente.

(b) Refaire la même chose pour la formule composite du point milieu.

(c) Utiliser l'approximation des questions précédentes pour estimer l'erreur de l'intégrale $I = \int_1^2 x \ln x \, dx$.

(a) Pour la méthode composite du trapèze, on obtient

$$\begin{aligned} R_T(f) &= -\frac{h^3}{12} \sum_{j=1}^n f''(\xi_j) = -\frac{h^2}{12} \sum_{j=1}^n f''(\xi_j)h \\ &= -\frac{h^2}{12} \sum_{j=1}^n f''(\xi_j)\Delta x_j \end{aligned}$$

où $\Delta_j = x_{j+1} - x_j = h$ pour chaque j . Puisque $\sum_{j=1}^n f''(\xi_j)\Delta x_j$ est une somme de

Riemann pour $\int_a^b f''(x) \, dx = f'(b) - f'(a)$, on obtient :

$$R_T(f) \approx -\frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)].$$

(b) Pour la méthode composite du point milieu, on a

$$R_M(f) = -\frac{h^3}{3} \sum_{j=1}^m f''(\xi_j) = -\frac{h^2}{6} \sum_{j=1}^m f''(\xi_j)(2h).$$

Mais $\sum_{j=1}^m f''(\xi_j)(2h)$ est une somme de Riemann pour

$$\int_a^b f''(x) \, dx = f'(b) - f'(a).$$

Donc

$$R_M(f) \approx \frac{h^2}{6}[f'(b) - f'(a)].$$

(c) * Pour la méthode composite du trapèze, on obtient

$$-\frac{1}{2}h^2 \ln 2 = -6,296 \times 10^{-6};$$

* Pour la méthode composite de Simpson on obtient

$$-\frac{1}{240}h^2 \ln 2 = -3,75 \times 10^{-6};$$

* Pour la méthode composite du point milieu, on obtient

$$\frac{1}{6}h^2 \ln 2 = 6,932 \times 10^{-6}.$$

Regroupons dans un tableau l'ordre des formules d'intégration, c'est à dire le degré du plus grand polynôme intégré exactement par la formule et le nombre de points de support :

Méthode	Degré du polynôme	Nb. de points	Ordre ou degré d'exactitude	Majoration d'erreur
Rectangle Point à gauche	0	1	$d = 0$	$\frac{(b-a)^2}{2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \max f' $
Rectangle Point à droite	0	1	$d = 0$	$\frac{(b-a)^2}{2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \max f' $
Point Milieu	0	1	$d = 1$	$\frac{(b-a)^3}{24} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \max f'' $
Trapèze	1	2	$d = 1$	$\frac{(b-a)^3}{12} \cdot \frac{1}{n} \cdot \max f'' $
Simpson	2	3	$d = 3$	$-\frac{(b-a)^5}{2880} \cdot \frac{1}{n} \cdot \max f'' $

On suppose tacitement que f est suffisamment dérivable. Les bornes sont atteintes pour un polynôme de degré $d + 1$.

Soit f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, avec $a < b$. On étudie l'approximation de l'intégrale

$$J = \int_a^b f(x) dx$$

par la méthode des rectangles, c'est à dire par la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$u_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k), \quad \text{avec } x_k = a + k \frac{b-a}{n}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[a, b]$. Pour tout nombre entier naturel k tel que $1 \leq k \leq 4$, on pose :

$$M_k = \sup_{a \leq x \leq b} |f^{(k)}(x)|.$$

1. Soit $[\alpha, \beta]$ un segment inclus dans $[a, b]$. On considère la fonction auxiliaire p définie par

$$p(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt - (x - \alpha)f(\alpha).$$

(a) Calculer les deux premières dérivées de p .

(b) Montrer que, pour tout élément x de $[\alpha, \beta]$, on a $-M_1 \leq p''(x) \leq M_1$.

En déduire par intégration un encadrement de $p(x)$ pour $\alpha \leq x \leq \beta$, puis établir l'inégalité suivante :

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt - (\beta - \alpha)f(\alpha) \right| \leq \frac{(\beta - \alpha)^2}{2} M_1.$$

(c) En appliquant cette inégalité aux segments $[x_k, x_{k+1}]$ pour $0 \leq k \leq n-1$, prouver enfin que :

$$|J - u_n| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} M_1.$$

2. Soit $[\alpha, \beta]$ un segment inclus dans $[a, b]$. On considère la fonction auxiliaire q définie par sur $[\alpha, \beta]$ par la relation

$$q(x) = p(x) - \frac{(x - \alpha)(f(x) - f(\alpha))}{2}.$$

(a) Calculer les deux premières dérivées de q .

(b) Etablir l'inégalité suivante :

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt - (\beta - \alpha)f(\alpha) - \frac{(x - \alpha)[f(\beta) - f(\alpha)]}{2} \right| \leq \frac{(\beta - \alpha)^3}{12} M_2.$$

[On pourra encadrer $q''(x)$ pour $\alpha \leq x \leq \beta$, puis, par intégration par parties, en déduire un encadrement de $q(x)$.]

(c) Prouver enfin que :

$$\left| J - u_n - \frac{(b-a)[f(b) - f(a)]}{2n} \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2.$$

3. On considère cette fois la fonction auxiliaire r définie sur $[\alpha, \beta]$ par la relation

$$r(x) = q(x) - \frac{(x - \alpha)^2(f'(x) - f'(\alpha))}{12}.$$

En procédant encore de la même manière, établir

$$\left| J - u_n - \frac{(b-a)[f(b) - f(a)]}{2n} + \frac{(b-a)^2[f'(b) - f'(a)]}{12n^2} \right| \leq \frac{(b-a)^5}{720n^4} M_4.$$

Indications.

- (i) Puisque f est continue sur $[\alpha, \beta]$ la fonction $x \mapsto \int_{\alpha}^x f(t) dt$ est la primitive de f sur $[\alpha, \beta]$ qui s'annule en α .
- (ii) Pour obtenir des inégalités contenant des intégrales, on utilise très souvent le résultat suivant (voir Appendice) :

$$\text{Si } a < b \quad \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

- (iii) Remarquer que $\int_a^b f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt$ et que $x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Retour au problème.

$$1. \text{ Par définition, } [\alpha, \beta] \subset [a, b], \quad p(x) = \int_a^b f(t) dt - (x - \alpha)f(\alpha).$$

$$(a) \text{ Pour tout } x \in [\alpha, \beta], \quad \left(\int_{\alpha}^x f(t) dt \right)' = f(x) \text{ donc}$$

$$p'(x) = f(x) - f(\alpha) \quad \text{et} \quad p''(x) = f'(x) \text{ sur } [\alpha, \beta].$$

$$(b) |p''(x)| = |f''(x)| \text{ pour tout } x \in [\alpha, \beta], \text{ et } |f'(x)| \leq M_1 \text{ par définition de } M_1.$$

$$\text{Donc : } \forall x \in [\alpha, \beta],$$

$$|p''(x)| \leq M_1,$$

ou encore

$$-M_1 \leq p''(x) \leq M_1.$$

On en déduit que pour tout $x \in [\alpha, \beta]$:

$$\left| \int_{\alpha}^x p''(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^x |p''(t)| dt \leq \int_{\alpha}^x M_1 dt = M_1(x - \alpha).$$

Or

$$\int_{\alpha}^x p''(t) dt = p'(x) - p'(\alpha) = p'(x).$$

$$\text{Donc, } |p'(x)| \leq M_1(x - \alpha) \text{ pour tout } x \in [\alpha, \beta].$$

De même, pour tout $x \in [\alpha, \beta]$:

$$\left| \int_{\alpha}^x p'(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^x |p'(t)| dt \leq \int_{\alpha}^x M_1(t - \alpha) dt = M_1 \frac{(x - \alpha)^2}{2},$$

et

$$\int_{\alpha}^x p'(t) dt = p(x) - p(\alpha) = p(x).$$

Donc

$$|p(x)| \leq M_1 \frac{(x - \alpha)^2}{2} \leq M_1 \frac{(\beta - \alpha)^2}{2}.$$

En particulier, pour $x = \beta$, on obtient :

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt - (\beta - \alpha)f(\alpha) \right| \leq \frac{(\beta - \alpha)^2}{2} M_1.$$

(c) Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $[x_k, x_{k+1}] \subset [a, b]$, l'inégalité précédente donne :

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt - (x_{k+1} - x_k)f(x_k) \right| \leq \frac{M_1(x_{k+1} - x_k)^2}{2}$$

c'est à dire

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt - \frac{(b-a)}{n} f(x_k) \right| \leq \frac{M_1(b-a)^2}{2n^2}$$

$$\begin{aligned} |J - u_n| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt - \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt - \frac{(b-a)}{n} f(x_k) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M_1(b-a)^2}{2n^2} = \frac{M_1(b-a)^2}{2n} \end{aligned}$$

En conclusion,

$$|J - u_n| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} M_1.$$

$$2. [\alpha, \beta] \subset [a, b], \quad q(x) = p(x) - \frac{(x-\alpha)[f(x) - f(\alpha)]}{2}$$

(a) On a

$$\begin{aligned} q'(x) &= p'(x) - \frac{f'(x) - f'(\alpha) + (x-\alpha)f'(x)}{2} \\ q''(x) &= p''(x) - \frac{f''(x) + f'(x) + (x-\alpha)f''(x)}{2} = -\frac{(x-\alpha)f''(x)}{2} \\ &(\text{car } p''(x) = f'(x)). \end{aligned}$$

(b) En reconduisant la méthode du 1b), on obtient :

$$\forall x \in [\alpha, \beta] : |q''(x)| \leq \frac{|x-\alpha|M_2}{2},$$

donc,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha}^x q''(t) dt \right| &\leq \frac{(x-\alpha)^2 M_2}{2}, \quad \text{et} \quad |q'(x)| \leq \frac{(x-\alpha)^2 M_2}{4}, \\ \left| \int_{\alpha}^x q'(t) dt \right| &\leq \frac{(x-\alpha)^3 M_2}{2}, \quad \text{et} \quad |q(x)| \leq \frac{(x-\alpha)^3 M_2}{12}. \end{aligned}$$

En particulier,

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt - (\beta - \alpha)f(\alpha) - \frac{(x-\alpha)[f(\beta) - f(\alpha)]}{2} \right| \leq \frac{(\beta - \alpha)^3}{12} M_2.$$

- (c) L'inégalité ainsi obtenue est valable pour tous les intervalles $[x_k, x_{k+1}]$ ($0 \leq k \leq n-1$), donc

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt - \frac{b-a}{n} f(x_k) - \frac{b-a}{2n} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^3} M_2.$$

En procédant comme en 1c), on obtient

$$\begin{aligned} & \left| J - u_n - \frac{(b-a)[f(b) - f(a)]}{2n} \right| \\ & \leq \sum_{k=1}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt - \frac{b-a}{n} f(x_k) - \frac{b-a}{2n} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) \right| \end{aligned}$$

d'où

$$\left| J - u_n - \frac{(b-a)[f(b) - f(a)]}{2n} \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2.$$

- (d) $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, $r(x) = q(x) - \frac{(x-\alpha)[f'(x) - f'(\alpha)]}{12}$

On a

$$\begin{aligned} r'(x) &= q'(x) - \frac{f'(x) - f'(\alpha) + (x-\alpha)^2 f'(x)}{12} \\ r''(x) &= q''(x) - \frac{[f'(x) + f'(\alpha)] + 4(x-\alpha)f''(x) + (x-\alpha)^2 f^{(3)}(x)}{12} \\ r^{(3)}(x) &= q^{(3)}(x) - \frac{[6f''(x) + 6(x-\alpha)f^{(3)}(x) + (x-\alpha)^2 f^{(4)}(x)]}{12} \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} q^{(3)}(x) &= -\frac{f''(x)}{2} - \frac{(x-\alpha)f^{(3)}(x)}{2}, \text{ donc} \\ r^{(3)}(x) &\leq \frac{(x-\alpha)^2 f^{(4)}(x)}{12}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$r^{(3)}(x) \leq \frac{|x-\alpha|^2}{12} M_4 \quad \text{pour tout } x \in [\alpha, \beta].$$

Par intégration successives, on obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha}^x r^{(3)}(t) dt \right| &= |r''(x)| \leq \frac{(x-\alpha)^3}{36} M_4 \\ \left| \int_{\alpha}^x r''(t) dt \right| &= |r'(x)| \leq \frac{(x-\alpha)^4}{4 \times 36} M_4 \\ \left| \int_{\alpha}^x r'(t) dt \right| &= |r(x)| \leq \frac{(x-\alpha)^5}{720} M_4. \end{aligned}$$

D'où l'on déduit

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt - (\beta - \alpha) - \frac{(\beta - \alpha)}{2} (f(\beta) - f(\alpha)) - \frac{(\beta - \alpha)^2}{12} (f'(\beta) - f'(\alpha)) \right| \\ & \leq \frac{(\beta - \alpha)^5}{720 n^4} M_4. \end{aligned}$$

Finalement, en appliquant cette formule sur chaque $[x_k, x_{k+1}]$ ($0 \leq k \leq n-1$), puis en procédant comme en 1c, on obtient :

$$\left| J - u_n - \frac{(b-a)[f(b) - f(a)]}{2n} + \frac{(b-a)^2[f'(b) - f'(a)]}{12n^2} \right| \leq \frac{(b-a)^5}{720n^4} M_4.$$

3.6 Méthode de Romberg

C'est un procédé d'accélération de la convergence d'autres méthodes comme celle des trapèzes. En général pour calculer $I = I(0) = \int_a^b f(x)dx$, on fixe un pas $h = \frac{b-a}{n}$ et on approxime $I(0)$ par $I(h) + E(h)$ où $E(h)$ est l'erreur commise, avec l'hypothèse que cette erreur tend vers 0 avec h pour f suffisamment régulière.

Notons par T_n ou $T(h)$, selon qu'il vaut mieux faire ressortir la dépendance en n ou celle de h (où $h = (b-a)/n$), la valeur approchée de I obtenue par la méthode de Newton-Côtes. Ecrivons la formule des trapèzes

$$\int_a^b f(x)dx - T_N(f) = -\frac{1}{12}(b-a)h^2 f''(\xi) \quad \xi \in]a, b[\quad (3.87)$$

sous la forme

$$\int_a^b f(x)dx = T(h) + h^2 R_2 + O(h^4). \quad (3.88)$$

On sait que la méthode des trapèzes est stable et convergente sur $\mathcal{C}^\infty([a, b])$, par contre, les résultats fournis par cette méthode ne sont pas souvent précis et la suite (T_n) ne converge pas très vite vers I . Nous allons donc voir comment améliorer la précision de la formule des trapèzes, ou ce qui revient ici au même, comment accélérer la convergence de (T_n) . La méthode de Romberg est dérivée des méthodes de Newton-Côtes et permet d'accélérer la convergence.

L'idée de l'algorithme de Romberg est de prendre une combinaison linéaire de $I(h)$ et $I(h/2)$ qui donne une approximation de $I(0)$, puis de recommencer avec $I(h/4)$ etc ...

Réécrivons (3.88) en remplaçant h par $h/2$. On obtient

$$\int_a^b f(x)dx = T(h/2) + \frac{1}{4}h^2 R_2 + O(h^4). \quad (3.89)$$

Éliminons maintenant le principal terme d'erreur engendré par h^2 entre (3.88) et (3.89). Si nous multiplions (3.89) par 4, soustrayons (3.88) et divisons par 3, nous obtenons

$$\int_a^b f(x)dx = T_1(h) + O(h^4) \quad (3.90)$$

où

$$T_1(h) = \frac{4T(h/2) - T(h)}{3}.$$

Le processus d'élimination de h^2 est appelé la *limite d'extrapolation* ou *extrapolation de Richardson*. Notons que nous n'avions pas besoin de connaître la valeur de R_2 pour mener

à bout ce processus. Cependant, la première interpolation ne nous donne aucune information de nouveau. $T_1(h)$ est juste une estimation de l'intégrale donnée par la méthode de Simpson. Cependant, nous pouvons continuer à éliminer le terme d'erreur h^4 , ensuite h^6 et ainsi de suite. Lorsque le terme d'erreur engendré par h^4 est éliminé, on obtient

$$\int_a^b f(x)dx = T_2(h) + O(h^6)$$

où

$$T_2(h) = \frac{4^2 T_1(h/2) - T_1(h)}{4^2 - 1}.$$

Pour obtenir $T_2(h)$, on a besoin des nombres $T(h)$, $T(h/2)$ et $T(h/4)$. De façon général, on calcule par récurrence

$$T_k(h) = \frac{4^k T_{k-1}(h/2) - T_{k-1}(h)}{4^k - 1},$$

et on obtient

$$\int_a^b f(x)dx = T_k(h) + O(h^{2k+2}).$$

Cette formule est valide, pourvu que l'intégrand f soit suffisamment différentiable. Si cette condition est vérifiée, alors on a le résultat suivant :

Théorème 3.34.

Si f est suffisamment dérivable, alors

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{k,n} = \lim_{k \rightarrow \infty} T_{k,n} = I$;
- (b) $T_{k,n} - I = O(h_n^{2k+2})$, lorsque n tend vers l'infini.
- (c) la suite $(T_{k+1,n})$, pour k fixé, converge vers I plus vite que $(T_{k,n})$, c'est à dire, pour tout k :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{T_{k+1,n} - I}{T_{k,n} - I} \right] = 0.$$

Les $T_{k,n}$ ainsi obtenus sont, en général, plus précis que les $T_{1,n}$ fournis par la méthode des trapèzes.

Exemple 22.

Utilisons l'intégration de Romberg pour estimer l'intégrale de $f(x) = e^{x^2}$ sur l'intervalle $[-1, 1]$. Les résultats sont contenus dans la table suivante :

h	$T(h)$	$T_1(h)$	$T_2(h)$	$T_3(h)$
1	1,859141	1,475731	1,462909	1,462654
$\frac{1}{2}$	1,571583	1,463711	1,462658	
$\frac{1}{4}$	1,490679	1,462723		
$\frac{1}{8}$	1,469712			

Tous les nombres dans la table de Romberg surestiment la valeur de l'intégrale, qui est 1.462652, arrondie à six décimales. On peut alors comparer $T_3(1) = 1,462654$, avec une erreur de $2 \cdot 10^{-6}$, et la meilleure approximation de la méthode des trapèzes, 1,469712 qui a une erreur de 7 unités dans la troisième décimale.

Dans cet exemple, toutes les dérivées de l'intégrand existe et on obtient d'excellents résultats. On ne peut pas exclure que la méthode de Romberg soit excellente lorsque la fonction à intégrer a une singularité dans une dérivé d'ordre inférieur.

Exemple 23.

Utilisons l'intégration de Romberg pour estimer l'intégrale de $f(x) = 1/x^2$ sur l'intervalle $[-1, 1]$. Les résultats sont regroupés dans la table suivante :

h	$T(h)$	$T_1(h)$	$T_2(h)$	$T_3(h)$
1	0,500000	0,638071	0,663608	
$\frac{1}{2}$	0,603553	0,656526	0,663516	
$\frac{1}{4}$	0,643283	0,663079		
$\frac{1}{8}$	0,658130			

On notera que la première extrapolation est la même que dans la méthode composite de Simpson calculée dans l'exercice 8. Généralement, on peut montrer que $T_{k,1} = S_k$, où S_k désigne l'approximation de la méthode de Simpson de l'intégrale I utilisant 2^k sous-intervalles.

En fait, c'est le seul test dont on connaît la valeur de l'intégrale, égale à $\frac{2}{3}$. Toutes les entrées dans la table sous-estiment l'intégrale. L'évaluation la plus étroite, avec une erreur de plus de 0.003, montre une amélioration de la seule une décimale de l'exactitude sur la meilleure approximation trapézoïdale. Toutes les dérivées de la fonction à intégrer ont un point singulier en $x = 0$.

Donnons à présent une forme beaucoup plus pratique de l'algorithme de Romberg. Pour ce faire, écrivons la formule d'approximation de l'intégrale de f en utilisant la formule composée des trapèzes

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) \right] - \frac{1}{12}(b-a)h^2 f''(\xi),$$

où $\xi \in]a, b[$, $h = (b-a)/m$ et $x_i = a + ih$ pour $i = 0, 1, \dots, m$.

Nous obtenons d'abord une approximation de la formule composite du trapèze avec $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 4$, $\dots$, $m_n = 2^{n-1}$, où n est un entier positive. Les valeurs du pas h_k correspondantes à m_k sont

$$h_k = (b-a)/m_k = (b-a)/2^{k-1}.$$

Avec cette notation, la formule du trapèze devient

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \frac{h_k}{2} \left[f(a) + f(b) + 2 \left(\sum_{i=1}^{2^{k-1}-1} f(x_i) \right) \right] \\ &\quad - \frac{1}{12}(b-a)h_k^2 f''(\xi_k), \end{aligned} \quad (3.91)$$

où $\xi_k \in]a, b[$.

Si $T_{k,1}$ désigne une partie de l'équation (3.91), alors on obtient :

$$T_{1,1} = \frac{h_1}{2}[f(a) + f(b)] = \frac{(b-a)}{2}[f(a) + f(b)];$$

$$\begin{aligned} T_{2,1} &= \frac{h_2}{2}[f(a) + f(b) + 2f(a + h_2)] \\ &= \frac{(b-a)}{4} \left[f(a) + f(b) + 2f\left(a + \frac{(b-a)}{2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2}[T_{1,1} + h_1(f(a + h_2))]; \end{aligned}$$

$$T_{3,1} = \frac{1}{2} \{T_{2,1} + h_2[f(a + h_3) + f(a + 3h_3)]\}$$

et d'une façon générale,

$$T_{k,1} = \frac{1}{2} \left[T_{k-1,1} + h_{k-1} \sum_{i=1}^{2^{k-2}} f(a + (2i-1)h_k) \right], \quad (3.92)$$

pour tout $k = 2, 3, \dots, n$.

Dans la pratique, la méthode de Romberg est très utilisée. Voici un exemple qui montre sa puissance.

Exemple 24.

Soit à calculer

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x + 0,01} = 4,615\,120\,517.$$

Avec le pas $h_1 = 1/3$, la méthode des trapèzes donne

$$T_{1,1} = 18,29, \quad \text{et} \quad T_{9,1} = 4,616.$$

L'application de l'algorithme de Romberg à ces 9 valeurs fournies $T_{9,1} = 4,615\,120\,793$.

Exemple 25.

Utilisons (3.92) pour déterminer la première étape par la méthode de Romberg pour approximer l'intégrale $\int_0^\pi \sin x \, dx$, avec $n = 6$. On obtient :

$$\begin{aligned} T_{1,1} &= \frac{\pi}{2}[\sin 0 + \sin \pi] = 0; \\ T_{2,1} &= \frac{1}{2} \left[T_{1,1} + \pi \sin \frac{\pi}{2} \right] = 1,57079633; \\ T_{3,1} &= \frac{1}{2} \left[T_{2,1} + \frac{\pi}{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right] = 1,89611890; \\ T_{4,1} &= \frac{1}{2} \left[T_{3,1} + \frac{\pi}{4} \left(\sin \frac{\pi}{8} + \sin \frac{3\pi}{8} + \sin \frac{5\pi}{8} + \sin \frac{7\pi}{8} \right) \right] = 1,97423160; \\ T_{5,1} &= 1,99357034, \quad \text{et} \quad T_{6,1} = 1,99839336. \end{aligned}$$

Comme la valeur exacte de l'intégrale est 1, il apparaît que, même si les calculs ne sont pas difficiles, la convergence est lente. Nous allons utiliser *l'extrapolation de Richardson*.

En fait, on peut montrer que si $f \in \mathcal{C}^\infty([a, b])$, la méthode composite du trapèze, peut être écrite avec le terme de l'erreur alternative sous la forme

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx - T_{k,1} &= \sum_{i=1}^{\infty} K_i h_k^{2i} \\ &= K_1 h_k^2 + \sum_{i=2}^{\infty} K_i h_k^{2i}, \end{aligned} \quad (3.93)$$

où K_i , pour chaque i est indépendant de h_k et dépendant seulement de $f^{(2i-1)}(a)$ et $f^{(2i-1)}(b)$.

Avec cette forme de la formule composite du trapèze, nous avons éliminé les termes provenant de h_k^2 en combinant cette équation avec sa contre-partie, et en remplaçant h_k par $h_{k+1} = h_k/2$:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx - T_{k+1,1} &= \sum_{i=1}^{\infty} K_i h_{k+1}^{2i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{K_i h_k^{2i}}{2^{2i}} \\ &= \frac{K_1 h_k^2}{4} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{K_i h_k^{2i}}{4^i}. \end{aligned} \quad (3.94)$$

En soustrayant (3.93) 4 fois de (3.94) et en simplifiant, on obtient une formule en $O(h_k^4)$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx - \left[T_{k+1,1} + \frac{T_{k+1,1} - T_{k,1}}{3} \right] &= \sum_{i=2}^{\infty} \frac{K_i}{3} \left(\frac{h_k^{2i}}{4^{i-1}} - h_k^{2i} \right) \\ &= \sum_{i=2}^{\infty} \frac{K_i}{3} \left(\frac{1 - 4^{i-1}}{4^{i-1}} \right) h_k^{2i}. \end{aligned}$$

On utilise ensuite une extrapolation à la formule précédente pour obtenir un résultat en $O(h_k^6)$, et ainsi de suite. Pour simplifier la notation, définissons par

$$T_{k,2} = T_{k,1} + \frac{T_{k,1} - T_{k-1,1}}{3}, \quad k = 2, 3, \dots, n,$$

et appliquons la procédure d'extrapolation de Richardson à ces valeurs. En continuant la notation, on obtient, pour chaque $k = 2, 3, 4, \dots, n$ et $j = 2, \dots, k$ une formule d'approximation $O(h_k^{2j})$ définie par

$$T_{k,j} = T_{k-1,j-1} + \frac{T_{k,j-1} - T_{k-1,j-1}}{4^{j-1} - 1}. \quad (3.95)$$

Les résultats de la récurrence (3.95) sont générés dans le tableau ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccccc}
T_{1,1} & & & & & & \\
T_{2,1} & T_{2,2} & & & & & \\
T_{3,1} & T_{3,2} & T_{3,3} & & & & \\
T_{4,1} & T_{4,2} & T_{4,3} & T_{4,4} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
T_{n,1} & T_{n,2} & T_{n,3} & T_{n,4} & \dots & T_{n,n} &
\end{array}$$

Exercice corrigé 15

L'approximation de l'intégrale

$$I = \int_0^2 e^x dx$$

avec 1, 2, 4 et 8 sous-intervalles par la méthode composite des trapèzes donne

$$T_{1,1} = 8,389\,056\,1$$

$$T_{2,1} = 6,912\,809\,9$$

$$T_{3,1} = 6,521\,6101$$

$$T_{4,1} = 6,422\,297\,8$$

Calculer les trois premières extrapolations de Romberg.

Soit $T_{k,n}$, ($n, k = 1, 2, \dots$), l'approximation obtenue en utilisant la méthode du trapèze pour l'intégrale I , utilisant 2^k intervalles avec un pas $h_k = (b - a)/2^k$.

(a) La première extrapolation de Romberg est donnée par

$$T_{2,2} = \frac{1}{3}(4T_{2,1} - T_{1,1}) = 6,420\,727\,8$$

$$T_{3,2} = \frac{1}{3}(4T_{3,1} - T_{2,1}) = 6,391\,2102$$

$$T_{4,2} = \frac{1}{3}(4T_{4,1} - T_{3,1}) = 6,389\,193\,7$$

(b) La deuxième extrapolation est donnée par

$$T_{3,3} = \frac{1}{15}(16T_{3,2} - T_{2,2}) = 6,389\,2424$$

$$T_{4,3} = \frac{1}{15}(16T_{4,2} - T_{3,2}) = 6,391\,059\,3$$

(c) La troisième extrapolation est donnée par

$$T_{4,4} = \frac{1}{63}(16T_{4,3} - T_{3,3}) = 6,389\,56\,4$$

qui a seulement une erreur de $-0,000\,000\,3$.

La table de Romberg correspondante s'écrit :

$$\begin{array}{ccccccc}
8,389\,056\,1 & & & & & & \\
6,912\,809\,9 & 6,420\,727\,8 & & & & & \\
6,521\,6101 & 6,391\,2102 & 6,389\,2424 & & & & \\
6,422\,297\,8 & 6,389\,193\,7 & 6,391\,059\,3 & 6,389\,56\,4 & & &
\end{array}$$

Enfin, terminons par le théorème de convergence suivant :

Théorème 3.35.

La convergence de T_k vers $I(f)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ est surlinéaire (c'est à dire plus rapide que toute suite géométrique).

Exercice corrigé 16

Montrer que l'approximation $T_{k,2}$ est la même que celle obtenue dans la formule composite de Simpson (voir formule (3.78)) avec $h = h_k$.

On a

$$\begin{aligned} T_{k,2} &= \frac{4T_{k,1} - T_{k-1,1}}{3} \\ &= \frac{1}{3} \left[T_{k-1,1} + 2h_{k-1} \sum_{i=1}^{2^{k-2}} f(a + (i - 1/2)h_{k-1}) \right] \quad (\text{d'après (3.78)}) \\ &= \left[\frac{h_{k-1}}{2} (f(a) + f(b)) + h_{k-1} \sum_{i=1}^{2^{k-2}-1} f(a + ih_{k-1}) \right. \\ &\quad \left. + 2h_{k-1} \sum_{i=1}^{2^{k-2}} f(a + (i - 1/2)h_{k-1}) \right] \quad (\text{par (3.91) avec } (k-1) \text{ au lieu de } k) \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} T_{k,2} &= \frac{1}{3} \left[h_k (f(a) + f(b)) + 2h_k \sum_{i=1}^{2^{k-2}-1} f(a + 2ih_k) + 4h_k \sum_{i=1}^{2^{k-2}} f(a + (2i - 1)h) \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{M-1} f(a + 2ih) + 4 \sum_{i=1}^M f(a + (2i - 1)h) \right] \end{aligned}$$

où $h = h_k$ et $M = 2^{k-2}$.

3.7 Quadratures de Newton-Côtes générales

Ces quadratures sont utilisées surtout lorsqu'on veut intégrer une fonction donnée par un tableau. Lorsqu'on a un nombre pair d'abscisses on choisit en général la quadrature composite du trapèze alliée à la méthode de Romberg. Lorsqu'on a un nombre impair d'abscisses, on utilise le plus souvent la quadrature composite de Simpson. Les quadratures de Newton-Côtes d'ordre plus élevé sont très peu utilisées. Par souci de clarté, nous allons donner les grandes lignes, sans trop rentrer dans les détails.

On a vu au chapitre précédent que le polynôme d'interpolation P_n pouvait s'écrire

$$P_n(x) = \psi_n(x) \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{(x - x_i)\psi'_n(x_i)}$$

avec $\psi_n(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n)$. On a donc d'après ce qui précède :

$$A_i^{(n)} = \int_a^b \frac{\psi_n(x)}{(x - x_i)\psi'_n(x_i)} dx.$$

En effet, prenons (nous sommes dans le cas $w(x) = 1$) :

$$h = \frac{b-a}{n} \quad \text{et} \quad x_i = a + ih \quad \text{pour} \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Le premier travail consiste à calculer les coefficients $A_i^{(n)}$ de la formule de quadrature. Introduisons (en se souvenant que $a = x_0$),

$$x = x_0 + sh,$$

alors $x = x_i$ équivaut à $s = i$. Lorsque la subdivision est régulière, en intégrant maintenant sur l'intervalle $x_0 \leq x \leq x_n$, l'expression des polynômes de Lagrange devient :

$$\begin{aligned} A_i^{(n)} &= \int_{x_0}^{x_n} \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx = h \int_0^n \prod_{j \neq i} \frac{s - j}{i - j} ds, \quad i = 0, 1, \dots, n. \\ &= \frac{(b-a)}{n} \cdot \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (s-j) ds, \end{aligned} \quad (3.96)$$

Il est facile de retrouver rapidement (3.96). En effet, il est facile de voir que

$$\prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \prod_{j \neq i} \frac{h(s - j)}{h(i - j)} = \prod_{j \neq i} \frac{s - j}{i - j}.$$

Ensuite, $x = x_0 + sh$ donne $dx = hds$ et donc que $\int_{x_0}^{x_n} \cdot dx = h \int_0^n \cdot ds$, puisque $x = x_i$ équivaut à $s = i$, si $x = x_n$, alors $s = n$ et si $x = x_0$, alors $s = 0$. Remarquons que le second intégrand dans l'égalité (3.96) est juste le polynôme fondamental correspondant aux abscisses i dans l'ensemble $\{0, 1, \dots, n\}$. Ainsi en multipliant par h , les poids $A_i^{(n)}$ dépendent seulement de i et de n et sont indépendants de la valeur de x_0 .

Les formules avec des poids définies par (3.96) s'appellent **les formules de Newton-Côtes fermées**. Si nous interpolons f aux abscisses $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, et nous intégrons par rapport à $[x_0, x_n]$, il vient une séquence de formules appelées **formules ouvertes de Newton-Côtes**. Le cas le plus simple de ces formules correspondant à $n = 2$ est

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx 2hf(x_1),$$

où $x_1 - x_0 = h$; c'est la méthode du point milieu.

Plus généralement, on appelle **méthode de Newton-Côtes**, toute méthode de type interpolation qui utilise des subdivisions régulières $(x_i)_i$ dans la phase de quadrature simple. Les méthodes des rectangles, des trapèzes et de Simpson sont des cas particuliers de la méthode de Newton-Côtes.

Exercice corrigé 17

Calculer les poids $A_i^{(n)}$ pour la formule générale de Newton-Côtes correspondant à $n = 1$ et $n = 2$ et donner les formule de quadrature dérivant de ces calculs.

(a) Pour $n = 1$, on obtient

$$A_0^{(1)} = h \int_0^1 \frac{s-1}{0-1} ds = \frac{1}{2}h$$

et

$$A_1^{(1)} = h \int_0^1 \frac{s-0}{1-0} ds = \frac{1}{2}h$$

Ceci conduit à la formule de Newton-Côtes d'ordre 1 (avec la notation $f_i = f(x_i)$)

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx 2h(f_0 + f_1), \quad \text{avec } x_1 - x_0 = h,$$

qui est la formule de quadrature du trapèze, approximant l'intégrale par l'aire du quadrilatère dont les sommets sont $(x_0, 0)$, (x_0, f_0) , $(x_1, 0)$ et (x_1, f_1) .

(b) Pour $n = 2$, on obtient

$$A_0^{(2)} = h \int_0^1 \frac{(s-1)(s-2)}{(0-1)(0-2)} ds = \frac{1}{3}h.$$

Les mêmes calculs conduisent à $A_2^{(2)} = \frac{1}{3}h$ et $A_1^{(2)} = \frac{4}{3}h$. La formule de Newton-Côtes dérivant de ces calculs est :

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \frac{1}{3}h(f_0 + 4f_1 + f_2), \quad \text{avec } x_1 - x_0 = h,$$

où l'on reconnaît la formule de Simpson.

Exercice corrigé 18

★

(a) Montrer que

$$A_i^{(n)} = A_{n-i}^{(n)}, \quad 0 \leq i \leq n. \quad (3.97)$$

(b) Montrer que

$$\sum_{i=0}^n A_i^{(n)} i^j = \frac{n^{j+1}}{j+1}, \quad 0 \leq j \leq n, \quad (3.98)$$

où le membre de droite de (3.98) résulte de l'intégration de s^j sur l'intervalle $0 \leq s \leq n$.

(c) Déterminer la formule de Newton-Côtes dérivant de (3.98) pour $n = 3$.

(a) Pour vérifier la formule (3.97), on commence avec (3.96) et on écrit :

$$A_{n-i}^{(n)} = h \int_0^n \prod_{j \neq n-i} \frac{s-j}{n-i-j} ds.$$

En faisant la substitution $s = n - u$, on obtient

$$A_{n-i}^{(n)} = h \int_0^n \prod_{j \neq n-i} \frac{n-u-j}{n-i-j} du,$$

et en posant $j = n - k$, il est clair que

$$\begin{aligned} A_{n-i}^{(n)} &= h \int_0^n \prod_{j \neq k-i} \frac{k-u}{k-i} ds \\ &= h \int_0^n \prod_{j \neq k-i} \frac{u-k}{i-k} ds = A_i^{(n)}, \end{aligned}$$

qui est l'égalité souhaitée.

(b) Si $f \in \mathcal{P}_n$, on déduit de l'unicité du polynôme d'interpolation que

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = R_n(f) = \sum_{i=0}^n A_i^{(n)} f_i.$$

Ainsi, lorsque l'intégrand est un polynôme de degré inférieur ou égal à n , la formule de Newton-Côtes d'ordre n donne une valeur égale à cette intégrale. En faisant un changement de variable avec l'intervalle $[0, n]$ à la place de $[x_0, x_n]$, on obtient :

$$\int_0^n g(s) ds = \sum_{i=0}^n A_i^{(n)} g(i), \quad (3.99)$$

tant que g est un polynôme en s de degré inférieur ou égal à n . On détermine alors $A_i^{(n)}$ en remplaçant $g(s)$ par s^j et en écrivant le système d'équations linéaires

$$\sum_{i=0}^n A_i^{(n)} i^j = \frac{n^{j+1}}{j+1}, \quad 0 \leq j \leq n. \quad (3.100)$$

(c) On pose $j = 0$ et $j = 2$ dans (3.98) avec $n = 3$ pour aboutir au système d'équations :

$$\begin{cases} 2A_0^{(3)} + 2A_1^{(3)} = 3 \\ 9A_0^{(3)} + 5A_1^{(3)} = 9, \end{cases}$$

dont les solutions sont $A_0^{(3)} = \frac{3}{8}$, $A_1^{(3)} = \frac{9}{8}$. La formule de Newton-Côtes d'ordre 3 dérivant de ces calculs est la suivante

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx \approx \frac{3h}{8} (f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3), \quad x_3 - x_0 = h.$$

encore appelé la méthode des 3/8.

Notez que nous avons seulement écrit quatre équations (correspondant à $j = 0$ et $j = 2$) que nous aurions pu utiliser, étant donné que cette méthode est exacte pour les quatre monômes $1, x, x^2$ et x^3 .

Généralisation.

Une démonstration trop longue pour être exposée ici permet d'aboutir aux formules des termes d'erreur. Elles proviennent de l'intégrale du terme d'erreur de la formule de Lagrange. Celle-ci contient un facteur $f^{(n+1)}(\xi)$ ou $f^{(n+2)}(\xi)$ où ξ est une fonction inconnue de x . Nous allons donner ces résultats.

Prenons toujours le changement de variables

$$x = a + hs = a + \frac{b-a}{n}s$$

où n est un entier. On obtient la relation

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n} \int_0^n g(s)ds \quad (3.101)$$

où

$$g(s) = f\left(a + \frac{b-a}{n}s\right) \quad (3.102)$$

Si nous supposons maintenant que $f(x)$ peut être approximée sur $[a, b]$ par son polynôme d'interpolation aux $(n+1)$ points de collocation, on obtient la formule d'approximation

$$\int_0^n F(s)ds \approx \sum_{i=0}^n A_i^{(n)} g(i) \quad (3.103)$$

où

$$A_i^{(n)} = \int_0^n \frac{s(s-1)\dots(s-i+1)(s-i-1)\dots(s-n)}{i(i-1)\dots(i-i+1)(i-i-1)\dots(i-n)} ds$$

et d'après ce que nous avons dit au début de ce chapitre, l'erreur commise dans le terme de droite de (3.103) peut être exprimée sous la forme,

$$\mathbf{R}_n = \int_0^n s(s-1)\dots(s-n)g[0, 1, \dots, n, s]ds. \quad (3.104)$$

Comme le coefficient du terme de la différence divisée n'est pas de signe constant dans l'intervalle $[0, n]$, nous ne pouvons pas utiliser directement le Théorème de la moyenne. Cependant, on peut montrer que, lorsque n est impair, cette erreur peut être exprimée sous la forme, si n est impair :

$$\mathbf{R}_n = \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_0^n s(s-1)\dots(s-n)ds, \quad (n \text{ impair}) \quad (3.105)$$

et si n est pair

$$\mathbf{R}_n = \frac{g^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_0^n \left(s - \frac{n}{2}\right) s(s-1)\dots(s-n)ds, \quad (n \text{ pair}) \quad (3.106)$$

où $0 < \xi < n$.

Si nous écrivons $h = (b-a)/n$ et $x_i = a + ih$, $f_i = f(x_i)$, le résultat peut être mis sous une forme explicite,

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx h \sum_{i=0}^n A_i^{(n)} f(x_i) \quad (3.107)$$

où les coefficients $A_i^{(n)}$ sont donnés par la relation (3.2), en remarquant que

$$\frac{d^r}{ds^r}g(s) = h^r \frac{d^r}{dx^r}f(x)$$

de sorte que dans la relation (3.101), l'erreur dans l'expression (3.107) est donc $h\mathbf{R}_n$.

On obtient alors les résultats suivants :

Théorème 3.36.

Si f est $(n+2)$ fois continuellement différentiable sur $[a, b]$, alors l'erreur de quadrature de Newton-Côtes pour n pair est égale à

$$R_n(f) = -h^{n+3} \frac{f^{(n+2)}(\xi(x))}{(n+2)!} \int_0^n s^2(s-1)\dots(s-n)ds, \quad \xi \in]0, n[.$$

Preuve. Laissé en exercice. □

Théorème 3.37.

Si f est $(n+1)$ fois continuellement différentiable sur $[a, b]$, alors l'erreur de quadrature de Newton-Côtes pour n impair est égale à

$$R_n(f) = -h^{n+2} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_0^n s(s-1)\dots(s-n)ds, \quad \xi \in]0, n[.$$

Preuve. Laissé en exercice. □

Pour illustrer ces deux résultats, considérons le cas $n = 2$. On obtient

$$A_0^{(2)} = \int_0^2 \frac{(s-1)(s-2)}{(-1)(-2)}ds = \frac{1}{3}, \quad A_1^{(2)} = \int_0^2 \frac{s(s-2)}{(1)(-1)}ds = \frac{4}{3},$$

$$A_3^{(2)} = \int_0^2 \frac{s(s-2)}{(2)(1)}ds = \frac{1}{3},$$

si bien que de la formule du Théorème 3.36 on déduit :

$$R_2 = \frac{h^5 f^{(5)}(\xi)}{24} \int_0^2 s(s-1)^2(s-2)ds = -\frac{h^5 f^{(4)}(\xi)}{90}.$$

La formule correspondante à (3.107) avec le terme d'erreur s'écrit :

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi), \quad (x_0 < \xi < x_2),$$

qui est la formule de Simpson. En effet, pour $x_i = x_0 + ih$ et $f_i = f(x_i)$, il vient :

$$P_2(x) = f_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_2)(x_1-x_0)} + f_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)},$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx &= f_0 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} dx + f_1 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_2)(x_1-x_2)} dx \\ &\quad + f_2 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} dx.\end{aligned}$$

Evaluons les intégrales utilisant un pas constant et un changement de variables :

$$t = \frac{x-x_0}{h}, \quad hdt = dx, \quad x_1 = x_0 + h, \quad \text{et} \quad x_2 = x_0 + 2h.$$

On obtient

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx &= \int_0^2 f(t) h dt \approx f_0 \int_0^2 \frac{h^2(t-1)(t-2)}{(-h)(-2h)} h dt \\ &\quad + f_1 \int_0^2 \frac{h^2 t(t-2)}{(h)(-h)} h dt + f_2 \int_0^2 \frac{h^2 t(t-1)}{(2h)(h)} h dt. \\ \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx &\approx \frac{hf_0}{2} \int_0^2 (t^2 - 3t + 2) dt - hf_1 \int_0^2 (t^2 - 2t) dt + \frac{hf_2}{2} \int_0^2 (t^2 - t) dt \\ &= \frac{hf_0}{2} \left(\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 2t \right) \Big|_0^2 - hf_1 \left(\frac{t^3}{3} - t^2 \right) \Big|_0^2 + \frac{hf_2}{2} \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t \right) \Big|_0^2 \\ &= \frac{hf_0}{2} \left(\frac{8}{3} - \frac{12}{2} + 4 \right) - hf_1 \left(\frac{8}{3} - 4 \right) + \frac{hf_2}{2} \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} \right) \\ &= \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2),\end{aligned}$$

et donc le résultat annoncé.

De la même manière, on pourrait obtenir les formules suivantes :

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{h}{2} (f_0 + f_1) - \frac{h^2}{12} f^{(2)}(\xi); \quad (\text{Formule du trapèze})$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2 + f_3) - \frac{h^5}{80} f^{(4)}(\xi); \quad (\text{Formule de Simpson})$$

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx = \frac{3h}{8} (f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) - \frac{3h^7}{80} f^{(4)}(\xi); \quad (\text{Formule de Simpson } 3/8)$$

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x) dx = \frac{2h}{45} (7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4) - \frac{8h^7}{945} f^{(6)}(\xi); \quad (\mathbf{n} = 4)$$

$$\int_{x_0}^{x_5} f(x) dx = \frac{5h}{288} (19f_0 + 75f_1 + 50f_2 + 50f_3 + 74f_4 + 19f_5) - \frac{275h^7}{12096} f^{(6)}(\xi); \quad (\mathbf{n} = 5)$$

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_6} f(x) dx &= \frac{h}{140} (41f_0 + 216f_1 + 27f_2 + 272f_3 + 27f_4 + 216f_5 + 41f_6) \\ &\quad - \frac{9h^9}{1400} f^{(8)}(\xi); \quad (\mathbf{n} = 6)\end{aligned}$$

$$\int_{x_0}^{x_7} f(x)dx = \frac{7h}{17280} (751f_0 + 3577f_1 + 1323f_2 + 2989f_3 + 2989f_4 + 1325f_5) \\ + 3577f_6 + 751f_7 - \frac{8183h^9}{1400} f^{(8)}(\xi), \quad (n=7).$$

Exercice corrigé 19

Utiliser les formules de Newton-Côtes fermées pour approximer l'intégrale

$$\int_0^{\pi/4} x \cos x \, dx.$$

On obtient pour :

- Formule des rectangles

$$\frac{\pi}{4} f(0) = 0,00000$$

- Formule du trapèze

$$\frac{1}{2} \frac{\pi}{4} \left[f(0) + f\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] = 0,218090.$$

- Formule de Simpson 1/3

$$\frac{1}{3} \frac{\pi}{8} \left[f(0) + 4f\left(\frac{\pi}{8}\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] = 0,262662.$$

- Formule de Simpson 3/8

$$\frac{3}{8} \frac{\pi}{12} \left[f(0) + 3f\left(\frac{\pi}{12}\right) + 3f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] = 0,262553.$$

En fait, la valeur exacte de cette intégrale est 0,262467 (avec six décimaux), et les erreurs correspondantes sont :

0,262467, 0,044377, -0,000195 et -0,000086 respectivement. □

Les erreurs $R_n(f)$ trouvées dans les théorèmes 3.36 et 3.37 sont celles de la formule de Newton-Côtes dites *fermées*. On peut aussi obtenir les formules *ouvertes* de Newton-Côtes dont nous allons donner les formulations sans démonstration.

Théorème 3.38.

- Si f est $(n+1)$ fois continuellement différentiable sur $[a, b]$, alors l'erreur de quadrature de Newton-Côtes ouvert pour n impair est égale à

$$R_n(f) = -h^{n+2} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_{-1}^{n+1} s(s-1) \dots (s-n) ds,$$

avec $\xi \in]-1, n+1[$.

- Si f est $(n+2)$ fois continuellement différentiable sur $[a, b]$, alors l'erreur de quadrature de Newton-Côtes ouvert n pair, est égale à

$$R_n(f) = -h^{n+3} \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_{-1}^{n+1} s(s-1) \dots (s-n) ds,$$

avec $\xi \in]-1, n+1[$.

Exercice corrigé 20

Utiliser les formules ouvertes de Newton-Côtes pour approximer l'intégrale

$$\int_0^{\pi/4} x \cos x \, dx.$$

On obtient pour :

- $k=0$

$$2 \frac{\pi}{8} f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0,294\,948$$

- $k=1$

$$\frac{3}{2} \frac{\pi}{12} \left[f\left(\frac{\pi}{12}\right) + f\left(\frac{\pi}{6}\right) \right] = 0,277\,375.$$

- $k=2$

$$\frac{4}{3} \frac{\pi}{16} \left[2f\left(\frac{\pi}{16}\right) - f\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2f\left(\frac{3\pi}{16}\right) \right] = 0,262\,297.$$

- $k=3$

$$\frac{5}{24} \frac{\pi}{20} \left[11f\left(\frac{\pi}{20}\right) + f\left(\frac{\pi}{10}\right) + f\left(\frac{3\pi}{20}\right) \right] = 0,262\,349.$$

Les erreurs correspondantes sont :

$$-0,022\,481, \quad -0,014\,908, \quad -0,000\,170, \quad \text{et} \quad 0,000\,118$$

respectivement.

En comparant ces résultats avec ceux obtenus dans l'exercice 19, on s'aperçoit que l'approximation obtenue par les formules ouvertes avec $k=1$ et $k=2$ sont plus précises que ceux des formules fermées. $\square$

FORMULES DE NEWTON-CÔTES

$$f_j = f(x_j) = f(a + jh) \quad \text{avec} \quad h = (b - a)/N, \quad a < \xi < b$$

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Trapèze (Newton-Côtes de degré 1)

- simple ($N = 1$)

$$I \approx \frac{h}{2}(f_0 + f_1)$$

$$R_1 = -\frac{h^3}{12}f''(\xi)$$

- composé (N entier)

$$I \approx \frac{h}{2} \left(f_0 + 2 \sum_{j=1}^{N-1} f_j + f_N \right)$$

$$R_1^C = -\frac{b-a}{12}h^3f''(\xi)$$

Simpson-1/3 (Newton-Côtes de degré 2)

- simple ($N = 2$)

$$I \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

$$R_2 = -\frac{h^5}{90}f^{(5)}(\xi)$$

- composé (N entier pair)

$$I \approx \frac{h}{3} \left(f_0 + 4 \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ impair}}}^{N-1} f_j + 2 \sum_{\substack{j=2 \\ j \text{ pair}}}^{N-2} f_j + f_N \right)$$

$$R_2^C = -\frac{b-a}{180}h^4f^{(4)}(\xi)$$

Simpson-3/8 (Newton-Côtes de degré 3)

- simple ($N = 3$)

$$I \approx \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)$$

$$R_3 = -\frac{3h^3}{80}f^{(4)}(\xi)$$

- composé (N entier multiple de 3)

$$I \approx \frac{3h}{8} \left(f_0 + 3 \sum_{\substack{j=1 \\ 3 \nmid j}}^{N-1} f_j + 2 \sum_{\substack{j=2 \\ 3 \mid j}}^{N-2} f_j + f_N \right)$$

$$e_3^C = -\frac{b-a}{80}h^4f^{(4)}(\xi)$$

Newton-Côtes de degré 4

- simple ($N = 4$)

$$I \approx \frac{2h}{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4)$$

- composé (N entier multiple de 4)

$$I \approx \frac{2h}{45} \left(7f_0 + 32 \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ impair}}}^{N-1} f_j + 12 \sum_{\substack{j=2 \\ j \text{ pair } 4 \nmid j}}^{N-2} f_j + 14 \sum_{\substack{j=3 \\ j \mid 4}}^{N-3} f_j + 7f_N \right)$$

$$R_4^C = -\frac{2(b-a)}{45}h^6f^{(6)}(\xi).$$

3.7.1 Comportement asymptotique des formules de Newton-Côtes

Nous présentons maintenant quelques résultats complémentaires dans le choix entre l'utilisation de la méthode de Newton-Côtes simples pour $(n+1)$ points et la méthode de Newton-Côte composée utilisant une formule de degré moins élevés à plusieurs reprises par rapport à des subdivisions successives, quand n est grand.

Le problème consiste à l'étude du comportement des termes d'erreur de Newton-Côtes

$$R_n(x) = \begin{cases} h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi) \int_0^n \frac{s(s-1)\dots(s-n)}{(n+1)!} dx & (n \text{ impair}) \\ h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi) \int_0^n \left(s - \frac{n}{2}\right) \frac{s(s-1)\dots(s-n)}{(n+2)!} dx & (n \text{ pair}) \end{cases} \quad (3.108)$$

où $(n+1)$ est le nombre d'ordonnées et $\xi \in [a, b]$. En fait lorsque n est suffisamment grand, l'intégrale dans (3.109)₁ est approximée par $-\frac{2}{n(\log n)^2}$ et celui de (3.109)₂ de moitié. Ainsi, dans l'un ou l'autre cas, le facteur numérique tend finalement vers zéro légèrement plus vite que $1/n$ mais moins vite que $1/n^2$.

Donc, si nous posons $h = (b-a)/n$, nous obtiendrons

$$R_n(x) \approx \begin{cases} -\frac{2(b-a)^{n+2}}{n^{n+3}(\log n)^2} f^{(n+1)}(\xi) & (n \text{ impair}) \\ -\frac{(b-a)^{n+3}}{n^{n+4}(\log n)^2} f^{(n+2)}(\xi) & (n \text{ pair}) \end{cases} \quad (3.109)$$

lorsque $n \rightarrow \infty$.



3.8 Représentation du reste : théorème de Peano

Lorsqu'on examine le reste du polynôme d'interpolation, on peut noter le rôle important joué par la partie $f^{(n+1)}(\xi)$. Si, par exemple, $f \in \mathcal{P}_n$, alors $f^{(n+1)} \equiv 0$, et le reste est identiquement nul comme espéré. Pour un x fixé, nous pouvons considérer le reste

$$R_n(f) = f(x) - P_n(f)$$

en tant que forme linéaire qui opère sur f et qui annule tous les éléments de $\mathcal{P}_n$. Peano a observé que si une forme linéaire possède cette propriété, alors elle doit également avoir une représentation simple en termes de $f^{(n+1)}$. Dès lors, nous allons exprimer l'erreur de la formule de quadrature, en terme du noyau de Peano.

Rappelons la formule de Taylor avec reste de Laplace (ou reste intégral).

Lemme 3.39. (Première formulation)

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$. Pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Ce résultat classique se prouve par récurrence en intégrant par parties le reste intégral. Introduisons les notations suivantes : soit x un réel ; pour toute fonction g , on définit sa partie positive par

$$g_+ : t \mapsto \sup(g(t), 0)$$

Il est clair que si $g(t) > 0$, $g_+(t) = g(t)$ et si $g(t) \leq 0$, $g_+ = 0$.

Définition 4.

Pour tout réel x et tout entier naturel n , nous désignerons par g_t la fonction $t \mapsto g_t(x) = (x-t)_+^n$ définie sur $-\infty < t < \infty$ comme suit :

$$(x-t)_+^n = \begin{cases} (x-t)^n & \text{si } -\infty < t \leq x \\ 0 & \text{si } x < t, \end{cases} \quad (3.110)$$

avec, par convention

$$(x-t)_+^0 = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq t \\ 0 & \text{si } x < t. \end{cases}$$

Il n'est pas difficile de montrer que d'après les définitions sur la dérivation, $\forall n \geq 1$

$$\frac{d}{dt}(x-t)_+^n = -n(x-t)_+^{n-1}.$$

Nous allons maintenant donner une autre formulation de la formule de Taylor avec reste intégral, légèrement différente, mieux adaptée aux calculs à venir.

Lemme 3.40. (Seconde formulation)

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$. Pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)_+^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Définition 5.

Une *forme linéaire* est une application de l'espace des fonctions définies sur $[a, b]$ aux nombres réels telle que

$$L(f)(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g),$$

et où f, g sont des fonctions et α, β des nombres réels.

Exemple 26.

Soit $P_n \in \mathcal{P}_n$, le polynôme d'interpolation pour une fonction f avec $(n + 1)$ abscisses distinctes. Alors L_x applique f aux nombres réels $P_n(x)$. L'indice x dans L_x permet tout simplement de dire que cette application dépend de x . Comme on peut le vérifier facilement, la forme de Lagrange des polynômes d'interpolation est une forme linéaire. Voici deux autres exemples :

$$L(f) = \int_a^b f(x) dx \quad \text{et} \quad L(f) = \sum_{i=1}^n \ell_i(x) f(x_i),$$

où les ℓ_i et x_i sont données.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat fondamental, le fameux théorème de Giuseppe Peano (1858-1932). Ce résultat dit ceci :

Théorème 3.41.

Soit g_t la fonction définie par (3.110) et L une forme linéaire qui commute avec l'opération d'intégration et vérifie en plus la condition :

$$L(g_t) \text{ est définie et } L(f) = 0 \text{ pour tout } f \in \mathcal{P}_n.$$

Alors, pour tout $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$,

$$\begin{aligned} L(f) &= \int_a^b f(x) dx - (b-a) \sum_{i=0}^n A_i^{(n)} f(x_i) \\ &= \frac{1}{n!} \int_a^b K_n(t) f^{(n+1)}(t) K(t) dt. \end{aligned} \quad (3.111)$$

où K_n est une fonction sur $[a, b]$ appelé *noyau de Peano* associé à la méthode définie de quadrature et définie par

$$K_n(t) = L(x \mapsto (x-t)_+^n), \quad \forall t \in [a, b].$$

Preuve. Nous devons être très prudents dans la preuve, car nous avons considéré la fonction tronquée $(x-t)_+^n$ comme une fonction de t , avec x se comportant comme un paramètre. Dans l'énoncé du théorème, nous avons écrit $L(g_t)$, avec $g_t(x) = (x-t)_+^n$, pour souligner que L est appliquée à la fonction $(x-t)_+^n$ considérée comme une fonction de x , avec t comme paramètre. Ainsi la forme linéaire L applique $(x-t)_+^n$ au nombre réel dépendant de t , c'est à dire, à une fonction de t . La forme L est dite *annulée* les fonctions appartenant à $\mathcal{P}_n$.

Le point de départ est la formule de Taylor (Théorème 3.40).

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n(f). \end{aligned} \quad (3.112)$$

à laquelle on applique l'opérateur linéaire L .

Observons que, si $g : (x, t) \mapsto g(x, t)$ est une fonction intégrable sur $[a, b] \times I$, le théorème de Fubini assure par ailleurs que

$$L \left(x \mapsto \int_I g(x, t) dt \right) = \int_I L(x \mapsto g(x, t)) dt.$$

La formule de Taylor avec reste intégral (3.112) donne

$$\begin{aligned} f(x) &= P_n(x) + \int_a^b \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \\ &= P_n(x) + \int_a^b \frac{1}{n!} \int_a^b (x-t)_+^n f^{(n+1)}(t) dt. \end{aligned}$$

Mais $P_n(x) \in \mathcal{P}_n$, puisque la méthode est d'ordre p , et donc $L(P_n(x)) = 0$ par hypothèse, de sorte que

$$\begin{aligned} L(f) &= L \left(x \mapsto \int_a^b \frac{1}{n!} (x-t)_+^n f^{(n+1)}(t) dt \right) \\ &= \int_a^b L \left(x \mapsto \frac{1}{n!} (x-t)_+^n f^{(n+1)}(t) \right) dt \\ &= \int_a^b \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t) \cdot L \left(x \mapsto \frac{1}{n!} (x-t)_+^n \right) dt \\ &= \frac{1}{n!} \int_a^b K_n(t) f^{(n+1)}(t) dt, \end{aligned}$$

dont on retiendra que l'opérateur linéaire L est appliqué à $(x-t)_n^+$ comme une fonction de x . De plus, on déduit l'estimation

$$L(f) \leq \frac{1}{n!} \|f^{(n+1)}\|_\infty \cdot \int_a^b |K_n(t)| dt.$$

Ce qui termine la preuve du Théorème 3.41. □

On déduit le corollaire suivant :

Corollaire 3.42.

Supposons que les conditions du théorème 3.41 sont satisfaites et de plus, que le noyau $K(t)$ ne change pas de signe sur $[a, b]$. Alors

$$L(f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} L(x^{n+1}), \quad a < \xi < b. \quad (3.113)$$

Preuve. Comme $f^{(n+1)}$ est continue et que $K(t)$ ne change pas de signe sur $[a, b]$, on peut appliquer le théorème de la moyenne à l'égalité (3.111) de sorte que l'on obtient

$$L(f) = f^{(n+1)}(\xi) \int_a^b K(t) dt, \quad a < \xi < b. \quad (3.114)$$

Cette égalité est vérifiée pour tout $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$. En particulier, si on remplace $f(x)$ par x^{n+1} , dans la dernière équation, on aboutit à

$$L(x^{n+1}) = (n+1)! \int_a^b K(t) dt,$$

qui termine la démonstration. $\square$

Remarque 11.

Lorsque $R(f) := L(f)$ est l'erreur d'une méthode d'intégration d'ordre k , la fonction $K(t) = L(g_t)$ est le noyau de Peano associé à cette méthode

$$K(t) = L(g_t) = \int_a^b (x-t)_+^k dx - \sum_{i=0}^{n-1} c_i (x_i - t)_+^k.$$

Corollaire 3.43.

Si la méthode de quadrature simple est d'ordre $r \geq 0$ et si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[-1, 1]$, on a la majoration suivante :

$$|L(f)| \leq \frac{1}{r!} \sup_{u \in [-1, 1]} |f^{(r+1)}(u)| \int_{-1}^{+1} |K_r(t)| dt,$$

où K_r est le noyau de Peano de la méthode considérée.

Dans un cas particulier, on obtient une majoration de l'erreur plus facile à évaluer :

Corollaire 3.44.

Si la méthode de quadrature simple est d'ordre $r \geq 0$ et si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[-1, 1]$, et si de plus le noyau de peano K_r est de signe constant sur $[-1, 1]$, alors, il existe $\xi \in [-1, 1]$ tel que on a la majoration suivante

$$|L(f)| \leq \frac{1}{r!} f^{(r+1)}(u) \int_{-1}^{+1} |K(t)| dt.$$

De plus $\int_{-1}^{+1} K_r(t) dt = \frac{1}{r+1} L(u \mapsto u^{r+1})$, et donc

$$L(f) = \frac{1}{(r+1)!} f^{(r+1)}(\xi) L(u \mapsto u^{r+1}).$$

Preuve. La première égalité est une conséquence du Théorème 3.41 et de la formule de la moyenne appliquée aux fonctions $f^{(r+1)}$ et K_r . La deuxième égalité s'obtient en prenant $f(u) = u^{r+1}$, ce qui donne $f^{(r+1)}(u) = (r+1)!$.

La troisième découle des deux premières. $\square$

Donnons à présent donner une estimation rigoureuse de l'erreur des méthodes de quadrature obtenue précédemment.

Exemple 27. (Erreur dans la méthode des rectangles et du point milieu)

La méthode des rectangles est d'ordre 0 au moins, sauf lorsque $x_i = \frac{a+b}{2}$ (point milieu) où elle est d'ordre 1. Donc

$$L(f) = \int_a^b \frac{K(t)}{1!} f^{(2)}(t) dt,$$

avec

$$\begin{aligned} K(t) &= L(x \rightarrow (x-t)_+) \\ &= \int_a^b (x-t)_+ dx - (b-a) \left(\frac{a+b}{2} - t \right)_+ \\ &= \left[\frac{(x-t)_+^2}{2} \right]_{x=a}^{x=b} - (b-a) \begin{cases} \frac{a+b}{2} - t & \text{si } t \leq \frac{a+b}{2} \\ 0 & \text{si } t \geq \frac{a+b}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Or,

$$\left[\frac{(x-t)_+^2}{2} \right]_{x=a}^{x=b} = \frac{1}{2} [(b-t)_+^2 + (a-t)_+^2]$$

et

$$(b-t)_+^2 = \begin{cases} (b-t)^2 & t \leq b \\ 0 & t \geq b \end{cases} \quad (a-t)_+^2 = \begin{cases} (a-t)^2 & t \leq a \\ 0 & t \geq a \end{cases}$$

si bien que

$$\left[\frac{(x-t)_+^2}{2} \right]_{x=a}^{x=b} = \frac{1}{2} (b-t)^2 \quad a \leq t \leq b.$$

Mais $t \mapsto \left[\frac{(x-t)_+^2}{2} \right]_{x=a}^{x=b} = (b-t)_+^2/2$, et on obtient l'expression suivante pour $K(t)$:

$$K(t) = \begin{cases} \frac{(t-a)^2}{2} & \text{si } t \leq \frac{a+b}{2} \\ \frac{(t-b)^2}{2} & \text{si } t \geq \frac{a+b}{2}. \end{cases}$$

Or $t \mapsto K(t)$ est positive et

$$\int_a^b K(t) dt = \frac{(b-a)^3}{24}.$$

Par le théorème 3.41, on a

$$\begin{aligned} L(f) &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{(t-a)^2}{2} f''(t) dt + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{(t-b)^2}{2} f''(t) dt \\ &= \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi), \quad \xi \in [a, b]. \end{aligned}$$

Exemple 28. (Erreur dans la méthode des rectangles avec $[a, b] = [-1, 1]$)

On sait que si f est continue sur $[-1, 1]$, l'erreur commise par l'approximation de f en utilisant le point milieu est

$$L(f) = \int_{-1}^1 f(u)du - 2f(0).$$

Cette méthode est d'ordre 1 et le noyau de Peano est donné pour $t \in [-1, 1]$ par :

$$\begin{aligned} K_1(t) &= L(u \mapsto (u - t)_+) = \int_{-1}^1 (u - t)_+ du - 2(-t)_+ \\ &= \int_t^1 (u - t) du - 2(-t)_+ \\ &= \left[\frac{1}{2}(u - t)^2 \right]_t^1 - 2(-t)_+ = \frac{1}{2}(1 - t)^2 - 2(-t)_+. \end{aligned}$$

On déduit donc que

$$K_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - t)^2 & \text{si } t \geq 0 \\ \frac{1}{2}(1 + t)^2 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

c'est à dire $K_1(t) \left(\frac{1}{2}(1 - |t|) \right)^2$ sur $[-1, 1]$.

Comme K_1 est à valeurs positives et que

$$\int_{-1}^1 K_1(t)dt = \int_0^1 (1 - t)^2 dt = \frac{1}{3},$$

le Corollaire 3.43 implique que

$$L(f) = \int_{-1}^1 f(u)du - 2f(0) = \frac{1}{3}f''(\xi), \quad \xi \in]-1, 1[.$$

Exemple 29. (Erreur dans la méthode du trapèze)

Cette méthode est d'ordre 1. Partons de la forme linéaire

$$L(f) = \int_a^b f(x)dx - \frac{h}{2}(f(a) + f(b)),$$

où $h = b - a$ et en prenant $sg_t(x) = (x - t)_+$, comme $L(g_t)$ existe, on obtient le noyau de Peano

$$K(t) = L(g_t) = \int_a^b (x - t)_+ dx - \frac{h}{2}((a - t)_+ + (b - t)_+).$$

Pour, on a $a \leq t \leq b$, $(a - t)_+ = 0$ et $(b - t)_+ = b - t$. Comme $(x - t)_+ = 0$ pour $x < t$ dans l'intégrale précédent, et comme $h = b - a$, on obtient après simplification

$$K(t) = \frac{1}{2}(b - t)(a - t) \leq 0, \quad \text{pour } a \leq t \leq b.$$

Cette fonction est négative sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b \frac{1}{2}(t - a)(t - b)dt = \frac{(b - a)^3}{12},$$

de sorte que

$$L(f) = \int_a^b \frac{1}{2}(t-a)(t-b)f''(t)dt = \frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi), \quad \xi \in [a, b],$$

qui est l'erreur commise dans la méthode du trapèze. $\square$

On peut aussi bien appliquer le Corollaire 3.42. En effet, le noyau $K(t)$ ne change pas de signe sur $[a, b]$. Nous avons besoin de calculer

$$L(x^2) = \int_a^b x^2 dx - \frac{h}{2}(a^2 + b^2) = \frac{1}{3}(b^3 - a^3) - \frac{1}{2}(b-a)(b^2 + a^2),$$

qui se simplifie pour donner $L(x^2) = -h^3/6$. Utilisons le Corollaire 3.42 puisque $K(t)$ ne change pas de signe sur $[a, b]$. En prenant

$$L(f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}L(x^{n+1}), \quad a < \xi < b.$$

On obtient

$$L(f) = \int_a^b f(x)dx - \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) = -\frac{h^3}{12}f''(\xi), \quad a < \xi < b.$$

Cas particulier.

Prenons $[a, b] = [-1, 1]$. Comme la méthode est d'ordre 1 sur $[-1, 1]$, et on a

$$L(f) = \int_{-1}^1 f(u)du - (f(-1) + f(1)),$$

de sorte que que

$$\begin{aligned} K_1(t) &= \int_{-1}^1 (u-t)_+ du - [(-1-t)_+ + (1-t)_+] \\ &= \int_t^1 (u-t)du - (1-t) \end{aligned}$$

de sorte que $K_1(t) = \left[\frac{1}{2}(1-t^2) \right] \leq 0$ sur $[-1, 1]$. Comme $K_1 = -\frac{2}{3}$, on en déduit

$$L(f) = \int_{-1}^1 f(u)du - (f(-1) + f(1)) = -\frac{2}{3}f''(\xi), \quad \xi \in]-1, 1[.$$

Exemple 30. (Erreur dans la méthode de Simpson)

Cette formule est d'ordre 3 et

$$L(f) = \int_a^b \frac{K_S(t)}{3!}f^{(4)}(t)dt,$$

avec

$$\begin{aligned} K_S(t) &= L(x \rightarrow (x-t)_+^3) \\ &= \int_a^b (x-t)_+^3 dx - \frac{(b-a)}{6} \left((a-t)_+^3 + 4 \left(\frac{a+b}{2} - t \right)_+^3 + (b-t)_+^3 \right). \end{aligned}$$

Un calcul fastidieux, mais guère difficile donne

$$K_S(t) = \begin{cases} \frac{(a-t)^3(2b+a-3t)}{12} & \text{si } t \leq \frac{a+b}{2} \\ \frac{(b-t)^3(b+2a-3t)}{12} & \text{si } t \geq \frac{a+b}{2} \end{cases}$$

Mais $t \mapsto K_S(t)$ est négative et

$$\int_a^b K_S(t) dt = -\frac{(b-a)^5}{480}$$

de sorte que

$$L(f) = \int_a^b \frac{K_S(t)}{3!} f^{(3)}(t) dt = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [a, b].$$

Cas particulier.

Prenons $[a, b] = [-1, 1]$. On écrit :

$$L(f) = \int_{-1}^1 f(u) du - 2 \left[\frac{1}{6} f(-1) + \frac{2}{3} f(0) + \frac{1}{6} \right].$$

si bien que

$$\begin{aligned} K_1(t) &= L(u \mapsto (u-t)_+^3) \\ &= \int_{-1}^1 (u-t)_+^3 du - 2 \left[0 + \frac{2}{3} (-t)_+^3 + \frac{1}{6} (1-t)_+^3 \right] \\ &= \int_t^1 (u-t)^3 du - 2 \left[\frac{2}{3} (-t)_+^3 + \frac{1}{6} (1-t)^3 \right]. \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$K_1(t) = \begin{cases} \left[\frac{1}{4} (1-t)^4 - \frac{1}{3} (1-t)^3 \right] = -\frac{1}{12} (1-t)^3 (1+3t), & \text{si } t \in [0, 1] \\ -\frac{1}{12} (1+t)^3 (1+3t) + \frac{4}{3} t^3 = -\frac{1}{12} (1+t)^3 (1-3t) & \text{si } t \in [-1, 0]. \end{cases}$$

de sorte que

$$K_3(t) = -\frac{1}{12} (1-|t|)^3 (1+3|t|) \quad \text{sur } [-1, 1].$$

Comme K_3 garde un signe constant et que

$$\int_{-1}^1 K_3(t) dt = \frac{1}{4} L(u \mapsto u^4) = -\frac{1}{15},$$

on en déduit finalement que

$$L(f) = \int_{-1}^1 f(u) du - 2 \left[\frac{1}{6} f(-1) + \frac{2}{3} f(0) + \frac{1}{6} \right] = -\frac{1}{90} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in]-1, 1[.$$

Dans cet exercice, on note $\mathcal{P}_k$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à k .

- (a) Soit une fonction $f \in \mathcal{C}([-1, 1])$. On note $\mathbb{P}$ le polynôme d'interpolation de f aux points -1 et 1 . Donner l'expression des polynômes de Lagrange L_i , $i = 1, 2, 3$, tels que

$$\mathbb{P}(x) = f(-1)L_1(x) + f(0)L_2(x) + f(1)L_3(x).$$

En déduire les coefficients a_i , $i = 1, 2, 3$, tels que la formule de quadrature

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = a_1f(1) + a_2f(0) + a_3f(1) + R(f) \quad (3.115)$$

est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à deux (c'est-à-dire tels qu'on a $R(f) = 0$ si $f \in \mathcal{P}_2$).

- (b) Soit $f \in \mathcal{P}_3$ et $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_2$ on polynôme d'interpolation aux points $-1, 0$ et 1 . On note $s \in \mathcal{P}_3$ le polynôme tel que

$$f(x) = \mathbb{P}(x) + s(x).$$

Montrer que s est de la forme

$$s(x) = a(x^2 - 1)x, \quad a \in \mathbb{R},$$

et en déduire que la formule (3.115) est en fait exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à trois.

- (c) On suppose $f \in \mathcal{C}^4([-1, 1])$ et on rappelle que, par la formule de Taylor avec reste intégral, on a

$$f(x) = p(x) + \frac{1}{6} \int_{-1}^1 f^{(4)}(t)(x-t)_+^3 dt,$$

avec $p \in \mathcal{P}_3$

$$(x-t)_+ = \begin{cases} (x-t) & \text{si } t \leq x \\ 0 & \text{si } t > x. \end{cases}$$

En déduire dans ce cas que l'erreur $R(f)$ de la formule de quadrature s'écrit

$$R(f) = \frac{1}{6} \int_{-1}^1 K(t)f^{(4)}(t),$$

où K est une fonction définie sur $[-1, 1]$ dont on précisera l'expression générale.

- (d) On admet le fait que la fonction K est paire. Calculer explicitement $K(t)$ pour $t \in [0, 1]$, et montrer que l'on trouve l'expression

$$K(t) = \begin{cases} -\frac{1}{12}(1-t)^3(1+3t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ K(-t) & \text{si } -1 \leq t \leq 0. \end{cases}$$

- (e) Vérifier que $K(x)$ ne change pas de signe sur l'intervalle $[-1, 1]$, puis utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer qu'il existe $\xi \in [-1, 1]$ tel que

$$R(f) = \frac{1}{6} f^{(4)}(\xi) \int_{-1}^1 K(t)dt.$$

En déduire enfin l'expression

$$R(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{90}.$$

- (a) Les trois polynômes de Lagrange associés aux points d'interpolation -1, 0 et 1 sont

$$L_1(x) = \frac{1}{2}x(x-1), \quad L_2(x) = -(x-1)(x+1), \quad L_3(x) = \frac{1}{2}(x+1)x.$$

Le polynôme d'interpolation $\mathbb{P}$ étant de degré deux, on a $P = f$ pour toute fonction f de $\mathcal{P}_2$, et les poids de la formule de quadrature recherchés sont simplement les intégrales des polynômes de Lagrange entre -1 et 1. On trouve alors :

$$a_1 = \int_{-1}^1 L_1(t) dt = \frac{1}{3}, \quad a_2 = \int_{-1}^1 L_2(t) dt = \frac{4}{3}, \quad a_3 = \int_{-1}^1 L_3(t) dt = \frac{1}{3}.$$

- (b) Par propriété du polynôme d'interpolation de f aux points -1, 0 et 1, on a $s(-1) = f(-1)\mathbb{P}(-1) = 0$, $s(0) = f(0) - P(0) = 0$ et $s(1) = f(1) - P(1) = 0$.

On peut donc factoriser s par le polynôme $(x+1)x(x-1) = (x^2-1)x$, qui est un polynôme de degré trois. Puisque s est également un polynôme de degré trois, le quotient de la division (exacte) de $s(x)$ par $(x^2-1)x$ est un réel, que l'on note a . En remarquant à présent que

$$\int_{-1}^1 s(t) dt = a \int_{-1}^1 (t^2-1) dt = 0,$$

on en déduit que, pour f appartenant à $\mathcal{P}_3$

$$R(f) = R(\mathbb{P}) + a \left(\int_{-1}^1 s(t) dt - \frac{1}{3}s(-1) - \frac{4}{3}s(0) - \frac{1}{3}s(1) \right) = R(\mathbb{P}) = 0,$$

la formule de quadrature étant exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à deux.

- (c) Par définition de l'erreur de quadrature $R(f)$, on a

$$R(f) = \int_{-1}^1 f(t) dt - \frac{1}{3}f(-1) - \frac{4}{3}f(0) - \frac{1}{3}f(1),$$

d'où, par utilisation de la formule de Taylor avec reste intégral,

$$\begin{aligned} R(f) &= R(p) + \frac{1}{6} \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f^{(4)}(t)(x-t)_+^3 dt \right) - \frac{1}{18} \int_{-1}^1 f^{(4)}(t)(-1-t)_+^3 dt \\ &\quad - \frac{2}{9} \int_{-1}^1 f^{(4)}(t)(-t)_+^3 - \frac{1}{18} \int_{-1}^1 f^{(4)}(t)(1-t)_+^3 dt. \end{aligned}$$

Ayant montré à la question précédente que la formule de quadrature était en fait exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à trois, on sait que $R(p) = 0$ et par conséquent, après avoir inversé l'ordre des intégrales dans l'intégrale double (que l'on peut justifier en évoquant le théorème de Fubini)

$$R(f) = \frac{1}{6} \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 (x-t)_+^3 dx - \frac{1}{3}(-1-t)_+^3 - \frac{4}{3}(-t)_+^3 - \frac{1}{3}(1-t)_+^3 \right) f^{(3)}(t) dt,$$

dont on déduit l'expression générale de K^2 .

- (d) On admet que la fonction K est paire. Pour tout t dans l'intervalle $[0, 1]$, on a

$$(-1-t)_+ = 0, \quad (-t)_+ = 0, \quad (1-t)_+ = (1-t), \quad \text{et}$$

d'où

$$\begin{aligned}
K(t) &= \frac{(1-t)^4}{4} - \frac{1}{3}(1-t)^3 \\
&= \frac{1}{12}(1-t)^3(3(1-t) - 4) \\
&= -\frac{1}{12}(1-t)^3(1+3t), \quad \forall t \in [0, 1].
\end{aligned}$$

- (e) L'expression ci-dessus montre que $K(t)$ reste négative pour $t \in [0; 1]$ et il en est de même pour $t \in [-1, 0]$ par parité. La fonction $f^{(4)}$ étant continue sur $[-1, 1]$, on a alors l'encadrement suivant :

$$\max_{\theta \in [-1, 1]} f^{(4)}(\theta) \int_{-1}^1 K(t) dt \leq \int_{-1}^1 K(t) f^{(4)}(t) dt \leq \min_{\theta \in [-1, 1]} f^{(4)}(\theta) \int_{-1}^1 K(t) dt,$$

et par suite

$$\max_{\theta \in [-1, 1]} f^{(4)}(\theta) \leq \frac{R(f)}{\frac{1}{6} \int_{-1}^1 K(t) f^{(4)}(t) dt} \leq \min_{\theta \in [-1, 1]} f^{(4)}(\theta).$$

Le théorème des valeurs intermédiaires assure alors qu'il existe $\xi \in [-1, 1]$ tel que

$$f^{(4)}(\xi) \frac{R(f)}{\frac{1}{6} \int_{-1}^1 K(t) f^{(4)}(t) dt},$$

d'où la première égalité demandée. Enfin, on a :

$$\int_{-1}^1 K(t) dt = 2 \int_0^1 K(t) dt = -\frac{1}{6} \int_{-1}^1 (1-t)^3(1+3t) dt = -\frac{1}{15},$$

dont on déduit la seconde égalité demandée.

3.9 Méthodes de Gauss

Nous avons vu au début de ce chapitre que le choix d'abscisses x_i équidistants dans les formules de quadrature du type interpolation conduit aux méthodes de Newton-Côtes qui sont exactes sur $\mathbb{P}_n$ mais ne sont pas stables, ni convergentes sur $\mathcal{C}^\infty([a, b])$.

Nous allons maintenant essayer de choisir les x_i de façon "optimale" c'est à dire de sorte que la formule de quadrature de type interpolation soit exacte sur $\mathbb{P}_{2n+1}$. Une telle méthode de quadrature est appelée **méthode de Gauss**.

Nous étudierons d'abord les conditions d'existence d'une telle méthode, ses propriétés et sa construction effective, c'est à dire la détermination des x_i et des $A_i^{(n)}$.

Théorème 3.45.

La formule de quadrature à $(n+1)$ points est exacte sur $\mathbb{P}_{2n+1}$ si et seulement si

- (a) elle est du type interpolation à $(n+1)$ points

- (b) les abscisses d'interpolation sont telles que $v(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$ vérifie

$$\int_a^b x^q v(x) w(x) dx = 0 \quad \forall q \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad (\text{Condition d'orthogonalité}).$$

Définition 6.

On appelle *formules de Gauss* des formules de quadrature vérifiant les conditions du théorème 3.45.

Nous prendrons les notations du début de ce chapitre, à savoir

$$I = \int_a^b f(x)w(x)dx$$

où $w(x) > 0$ lorsque $x \in [a, b]$ et w intégrable sur $[a, b]$. On évalue I à l'aide de la formule de quadrature approchée :

$$I = \sum_{i=0}^m A_i^{(n)} f(x_i) + R_n(f)$$

où $R_n(f)$ représente l'erreur. Posons

$$\psi_n(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n).$$

Donnons la condition pour qu'une telle formule soit exacte sur $\mathbb{P}_{2n+1}$. On a le

Théorème 3.46.

Une condition nécessaire et suffisante pour que la formule de quadrature de Gauss soit exacte sur $\mathbb{P}_{2n+1}$ est que

$$\int_a^b x^p \psi_n(x) w(x) dx = 0, \quad \text{pour } p = 0, \dots, n.$$

On démontre également que ces formules sont "optimales" en ce sens qu'il n'est pas possible de faire mieux :

Théorème 3.47.

Les formules de quadrature de Gauss ne peuvent pas être exactes sur $\mathbb{P}_{2n+2}$.

Preuve. Soit à calculer $I = \int_a^b \psi_n^2(x) w(x) dx$. Puisque $\psi_n^2(x)$ et $w(x)$ sont positifs, quelque soit $x \in [a, b]$, on a $I > 0$. D'autre part :

$$\sum_{i=0}^n A_i^{(n)} \psi_n^2(x_i) = 0$$

par définition de ψ_n . La formule de Gauss n'est donc pas exacte sur $\mathbb{P}_{2n+2}$. $\square$

Le Théorème 3.46 nous donne une condition nécessaire et suffisante pour que la méthode de Gauss soit exacte sur $\mathbb{P}_{2n+1}$. La question qui se pose est la suivante : existe-t-il un polynôme ψ_n satisfaisant la condition du Théorème 3.46 et si oui, est-il unique ?

En d'autres termes existe-t-il des abscisses x_i réelles, distinctes, uniques, situées dans $[a, b]$ telles que la condition du Théorème 3.46 soit vérifiée ? On a le

Théorème 3.48.

- (a) Pour les méthodes de Gauss les abscisses x_i sont réelles, distinctes, situées dans $[a, b]$ et uniques.
- (b) Les méthodes de Gauss sont stables et convergentes sur $\mathcal{C}^\infty([a, b])$.

3.9.1 Etude de l'erreur

Soit P_{2n+1} le polynôme d'interpolation d'Hermite aux abscisses $x_0, \dots, x_n$. On a vu au paragraphe 2.8, Chapitre 2 que $P_{2n+1} \in \mathbb{P}_{2n+1}$ et que

$$f(x) = P_{2n+1}(x) + \psi_n^2(x) \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)}, \quad \xi \in [a, b]$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)w(x)dx &= \int_a^b P_{2n+1}(x)w(x)dx \\ &\quad + \int_a^b \psi_n^2(x) \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)} w(x)dx \end{aligned} \quad (3.116)$$

en supposant $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a, b])$. Or la formule de quadrature de Gauss est exacte sur $\mathbb{P}_{2n+1}$. D'où, puisque

$$P_{2n+1}(x_i) = f(x_i), \quad \text{pour } i = 0, \dots, n :$$

$$\begin{aligned} &\int_a^b f(x)w(x)dx - \sum_{i=0}^n A_i^{(n)} f(x_i) \\ &= \int_a^b \psi_n^2(x) \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} w(x)dx, \end{aligned}$$

et puisque la fonction $\psi_n(x)w(x)$ ne change pas de signe dans $[a, b]$, on peut appliquer le théorème de la moyenne ; d'où

Théorème 3.49.

Si $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a, b])$, alors l'erreur quadratique de la méthode de Gauss est donnée par

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_a^b \psi_n^2(x) w(x)dx, \quad \xi \in [a, b].$$

On a aussi le résultat suivant :

Théorème 3.50. (Gauss-Jacobi)

Soit $w(x) > 0$ une fonction poids définie sur $[a, b]$ avec des polynômes orthogonaux correspondants $P_n(x) > 1$. Soit $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$, les zéros de $P_n(x)$. Alors, on peut trouver des constantes positives $w_1, w_2, \dots, w_n$ telles que

$$\int_a^b w(x)P(x)dx = \sum_{i=1}^n w_i P(x_i), \quad (3.117)$$

où $P(x) \in \mathbb{P}_{2n-1}$.

Preuve. Soit donné un polynôme vérifiant les conditions du théorème. Soit $Q(x) \in \mathbb{P}_{n-1}$ prenant les valeurs de $P(x)$ aux points $x_1, \dots, x_n$. On peut écrire $Q(x)$ sous la forme de Lagrange

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n P(x_i)L_i(x_i), \quad L_i(x) = \frac{w(x)}{(x - x_i)w'(x_i)}, \quad w(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i).$$

Donc, le polynôme $P(x) - Q(x)$ admet les mêmes zéros aux points $x_1, \dots, x_n$ et par conséquent

$$P(x) - Q(x) = P_n(x)R_{n-1}(x),$$

pour tout $R_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$, si bien que d'après la propriété d'orthogonalité des polynômes $P_n(x)$ de degré inférieur, on a

$$\begin{aligned} \int_a^b w(x)P(x)dx &= \int_a^b w(x)[Q(x) + P_n(x)R_{n-1}(x)]dx \\ &= \int_a^b w(x)Q(x)dx \\ &= \int_a^b w(x) \sum_{i=1}^n P(x_i)L_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \int_a^b w(x)L_i(x)dx \right\} P(x_i). \end{aligned}$$

Si nous posons

$$w_i = \int_a^b w(x)L_i(x)dx,$$

alors la relation (3.117) est vérifiée. Maintenant, $L_i(x) \in \mathbb{P}_{n-1}$ et est nul aux points $x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$. Ainsi $(L_i(x))^2 \in \mathbb{P}_{2n-2}$ et est nul aux mêmes points. De plus $L_i(x_i) = 1$. On en déduit :

$$w_i = \sum_{j=1}^n w_j (L_i(x_j))^2 = \int_a^b w(x)[L_i(x)]^2 dx > 0.$$

Les abscisses x_i sont les racines de certains polynômes et sont généralement des nombres irrationnels. $\square$

Pour le Théorème de Gauss-Jacobi, on a le résultat suivant sur l'erreur.

Théorème 3.51. (A. Markoff)

Soit $w(x)$ et $x_1, x_2, \dots, x_n$ donnés comme dans le théorème 3.50. Soit $f(x) \in \mathcal{C}^{2n}([a, b])$. Alors,

$$E_n(f) = \int_a^b w(x)f(x) dx - \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!k_n^2}, \quad (3.118)$$

où k_n est le premier coefficient du polynôme orthonormal $P_n^*(x)$ associé à $w(x)$, et où $a < \xi < b$.

Preuve. Le principe est ici d'utiliser l'interpolation de Hermite à chaque abscisse, répétée une fois. Soit $H_{2n-1}(x)$ un polynôme de $\mathbb{P}_{2n-1}$, pour lequel

$$H_{2n-1}(x_i) = f(x_i), \quad H'_{2n-1}(x) = f'(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Alors, d'après le théorème sur l'interpolation de Hermite vu dans le précédent chapitre, on a

$$f(x) = H_{2n-1}(x) + \frac{f^{(2n)}(\xi(x))}{(2n)!} (x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \dots (x - x_n)^2 \quad (3.119)$$

pour $a \leq x \leq b$ et $a < \xi(x) < b$. En appliquant à $f(x) - H_{2n-1}(x)$ la formule de Taylor-Young, qui dit que si f est $(n+1)$ différentiable en $x = x_0$, alors

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \\ &\quad + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} [f^{(n+1)}(x_0) + \varepsilon(x)], \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0, \end{aligned}$$

$\frac{f(x) - H_{2n-1}(x)}{(x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \dots (x - x_n)^2} \in \mathcal{C}^0([a, b])$, et donc $f^{(2n)}(\xi(x))$ est aussi continue. Multiplions (3.119) par $w(x)$

$$w(x)f(x) = w(x)H_{2n-1}(x) + \frac{f^{(2n)}(\xi(x))}{(2n)!} w(x) \frac{[P_n^*(x)]^2}{k_n^2} \quad (3.120)$$

où $P_n^*(x)$ est un polynôme orthogonal de degré n associé à $w(x)$. En intégrant (3.120) et en utilisant le Théorème de la moyenne, on obtient

$$\begin{aligned} \int_a^b w(x)f(x) dx &= \int_a^b w(x)H_{2n-1}(x) dx + \frac{1}{(2n)!k_n^2} \int_a^b f^{(2n)}(\xi(x)) w(x) [P_n^*(x)]^2 dx \\ &= \int_a^b w(x)H_{2n-1}(x) dx + \frac{f^{(2n)}(\xi(x))}{(2n)!k_n^2} \int_a^b w(x) [P_n^*(x)]^2 dx \\ &= \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + \frac{f^{(2n)}(\xi(x))}{(2n)!k_n^2}, \end{aligned}$$

qui est le résultat annoncé. $\square$

3.9.2 Différents systèmes de polynômes orthogonaux

Théorème 3.52.

- Les polynômes de Legendre $P_n(x)$ sont donnés par $P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$. Ils sont définis sur $[-1, 1]$ avec le poids $w(x) = 1$ et vérifient la relations de récurrence

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \quad \text{avec} \\ P_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad P_1(x) = x.$$

En utilisant les propriétés de ces polynômes, si $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([-1, 1])$, on trouve

$$A_i^{(n)} = \frac{2(1-x_i^2)}{(n+1)^2 P_n^2(x_i)} \quad \text{pour } i = 0, \dots, n \\ R(f) = \frac{2^{2n+3}[(n+1)!]^4}{(2n+3)[(2n+2)!]^3} f^{(2n+2)}(\xi) \quad \xi \in [-1, 1].$$

- Les polynômes de Laguerre L_n sont définies sur $[0, \infty)$ avec $w(x) = e^{-x}$ et vérifient la relation de récurrence :

$$L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x) \quad \text{avec} \\ P_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad P_1(x) = 1-x.$$

En utilisant les propriétés de ces polynômes, si $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([0, +\infty))$, on trouve

$$A_i^{(n)} = \frac{[(n+1)!]^2}{x_i [L'_{n+1}(x_i)]^2} \quad \text{pour } i = 0, \dots, n \\ R(f) = \frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi) \quad \xi \in [0, +\infty).$$

- Les polynômes de Chebychev $T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arc} \cos x)$ vérifient les conditions du théorème 3.45 pour la fonction de poids $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $[-1, 1]$

Soit $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([-1; 1], \mathbb{R})$. Il existe $\xi \in [-1, 1]$ tel que

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sum_{i=1}^n \frac{\pi}{n} f\left(\cos \frac{(2i-1)\pi}{2n}\right) + \frac{\pi}{2^{2n+2}(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi).$$

- Les polynômes d'Hermite H_n sont définis sur $(-\infty, +\infty)$ avec $w(x) = e^{-x^2}$ et vérifient la relation de récurrence :

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nL_{n-1}(x) \quad \text{avec} \\ P_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad P_1(x) = 2x.$$

En utilisant les propriétés de ces polynômes, si $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([0, +\infty))$, on trouve

$$A_i^{(n)} = \frac{2^{n+2}(n+1)!\sqrt{\pi}}{[H_{n+1}(x)]^2} \quad \text{pour } i = 0, \dots, n \\ R(f) = \sqrt{\pi} \frac{(n+1)!}{2^{n+1}(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi) \quad \xi \in (-\infty, \infty).$$

Exemple 31.

Pour la méthode de Gauss-Legendre et pour

- $n = 1$, la relation définissant les polynômes de Legendre donne

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1).$$

Ce polynôme admet deux racines $x_0 = -1/\sqrt{3}$ et $x_1 = 1/\sqrt{3}$ définissant la subdivision de l'intervalle de base. Les valeurs $A_i^{(1)}$ s'en déduisent. On obtient

$$A_0^{(1)} = \int_{-1}^1 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} dx = \int_{-1}^1 \frac{-x + 1/\sqrt{3}}{2/\sqrt{3}} dx = 1$$

et on montre aussi que $A_1^{(1)} = 1$. L'intégrale de Gauss-Legendre se réduit à :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Le changement de variable $y = (b-a)/2 + (b-a)x/2$, fournit une approximation de l'intégrale

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \left(f\left(\frac{b-a}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right) \right).$$

- Pour $n = 2$, le polynôme $P_3(x)$ admet trois racines, $x_0 = -\sqrt{3/5}$, $x_1 = 0$ et $x_3 = \sqrt{3/5}$. Le calcul des valeurs $A_0^{(2)} = A_2^{(2)} = 5/9$ et $A_1^{(2)} = 8/9$ donne l'approximation de l'intégrale

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right).$$

On peut aussi montrer que la méthode d'intégration de Gauss-Chebychev d'ordre 3 est :

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \frac{\pi}{3} \left[f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + f(0) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right].$$

Théorème 3.53.

Supposons que $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les n racines du polynôme de Legendre $P_n(x)$ et que pour $i = 1, 2, \dots, n$, les nombres c_i sont définis par

$$c_i = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx.$$

Si $P(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $2n$, alors

$$\int_{-1}^1 P(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i P(x_i).$$

Preuve. Considérons le cas d'un polynôme $R(x)$ de degré inférieur ou égal à n . Écrivons $R(x)$ sous forme de $(n-1)$ polynômes de Lagrange avec des nœuds aux racines n ième

du polynôme Legendre $P_n(x)$. Cette représentation est exacte, puisque le terme d'erreur engendré par la dérivée n ème de R est nul. Donc

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 R(x)dx &= \int_{-1}^1 \left[\sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j} R(x_i) \right] dx \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j} dx \right] R(x_i) = \sum_{i=1}^n c_i R(x_i).\end{aligned}$$

On obtient le résultat pour les polynômes de degré inférieur ou égal à n .

Si le polynôme $P(x)$ de degré inférieur ou égal à 2 est divisé par le n ème polynôme de Legendre $P_n(x)$ alors, on obtient deux polynômes $Q(x)$ et $R(x)$ de degré inférieur ou égal à n avec

$$P(x) = Q(x)P_n(x) + R(x).$$

Maintenant nous allons utiliser l'unicité des polynômes de Legendre. D'abord, notons que le degré du polynôme $Q(x)$ est inférieur ou égal à n , si bien que

$$\int_{-1}^1 Q(x)P_n(x) = 0.$$

Mais, comme x_i est une racine de $P_n(x)$ pour chaque $i = 1, 2, \dots, n$, on obtient

$$P(x)_i = Q(x_i)P_n(x_i) + R(x_i) = R(x_i).$$

Finalement, puisque $R(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n ; ceci implique

$$\int_{-1}^1 R(x) = \sum_{i=1}^n c_i R(x_i).$$

En combinant toutes ces relations, on obtient que la formule est exacte pour le polynôme $P(x)$:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 P(x)dx &= \int_{-1}^1 [Q(x)P_n(x) + R(x)]dx \\ &= \int_{-1}^1 R(x)dx = \sum_{i=1}^n c_i R(x_i) = \sum_{i=1}^n c_i P(x_i).\end{aligned}$$

Ce qui démontre le résultat annoncé. $\square$

Remarque 12.

- (a) Les constantes dont il est question pour la méthode de quadrature de Gauss peuvent être générés par l'équation du Théorème 3.53, mais ces constantes sont les racines du polynôme de Legendre et sont habituellement présentées en tableaux.
- (b) Un des inconvénients de l'intégration de Gauss est la dépendance des x_i et c_i sur a et b de sorte qu'à chaque fois un nouvel intervalle d'intégration est nécessaire et les calculs doivent être refaits. Le problème est grandement simplifié en remarquant qu'une intégrale $\int_a^b f(x)dx$ sur un intervalle arbitraire $[a, b]$ peut être transformée en une intégrale sur l'intervalle $[-1, 1]$ par l'utilisation du changement de variables

$$t = \frac{2x - a - b}{b - a} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}[(b - a)t + a + b].$$

Ceci permet d'écrire la formule de quadrature sous la forme

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)t + (b+1)}{2}\right) \frac{(b-a)}{2} dt. \quad (3.121)$$

Par exemple, la méthode de quadrature appliquée à l'intégrale $I = \int_1^{1.5} e^{-x^2} dx$ exige que l'intégrale soit d'abord transformée en un problème dont l'intervalle d'intégration est de $[-1, 1]$. En appliquant (3.121), on obtient

$$\int_1^{1.5} e^{-x^2} dx = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 e^{-(t+5)^2/16} dt.$$

Exemple 32.

Considérons la détermination des nombres x_0 , x_1 , c_0 , et c_1 tels que

$$\int_0^1 f(x)dx \approx c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1)$$

soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

Prenons $\psi_2(x) = x^2 - x + 1/6$ vérifiant la condition d'orthogonalité du théorème 3.45 sur l'intervalle $[0, 1]$ (obtenu par "orthonormalisation de Gram-Schmidt") qui admet comme racines

$$x_0 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad x_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Le système d'équations 3.122 devient

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) & \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

admettant $c_0 = 1/2$ et $c_1 = 1/2$, comme solution, si bien que la méthode de quadrature correspondante s'écrit :

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{2} \left\{ f \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right] + f \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right] \right\}.$$

3.10 La méthode des coefficients indéterminés

Plutôt que d'interpoler f en certains points et d'intégrer le polynôme d'interpolation, on préfère souvent rechercher une formule de quadrature du type

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{0 \leq i \leq n} A_i^{(n)} f(x_i)$$

qui est exacte sur un certain ensemble, par exemple sur $\mathbb{R}_l[X]$ avec le plus grand l possible. En effet, soit le polynôme d'interpolation $P_n(x)$. Écrivons $P_n(x)$ sous la forme de Lagrange

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x)$$

On a

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\approx \int_a^b P_n(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^n y_i L_i(x)dx \\ &= \sum_{i=0}^n y_i \int_a^b L_i(x)dx.\end{aligned}$$

Si nous posons

$$y_i = f(x_i) \quad \text{et} \quad A_i^{(n)} = \int_a^b L_i(x)dx.$$

Alors

$$\int_a^b f(x)dx \approx A_0^{(n)} f(x_0) + A_1^{(n)} f(x_1) + A_2^{(n)} f(x_2) + \dots + A_n^{(n)} f(x_n).$$

On obtient le résultat suivant :

Théorème 3.54.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Etant donnés $(n+1)$ nombres réels $x_0, x_1, \dots, x_n$, tous distincts, il existe des coefficients $A_0^{(n)}, A_1^{(n)}, \dots, A_n^{(n)}$, uniques, tels que la formule de quadrature

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{0 \leq i \leq n} A_i^{(n)} f(x_i)$$

soit exacte sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Preuve. Puisque la formule doit être exacte sur $\mathbb{R}_n[X]$, on écrit pour

$f : x \mapsto x^k$ et pour $0 \leq k \leq n$

$$\int_a^b x^k dx \approx \sum_{0 \leq i \leq n} A_i^{(n)} f(x_i)$$

ce qui est un système linéaire à $(n+1)$ inconnues $A = (A_i^{(n)})_{0 \leq i \leq n}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_i & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_0^k & x_1^k & \dots & x_i^k & \dots & x_n^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \dots & x_i^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^{(n)} \\ A_1^{(n)} \\ \vdots \\ A_k^{(n)} \\ \vdots \\ A_n^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_a^b dx \\ \int_a^b x dx \\ \vdots \\ \int_a^b x^k dx \\ \vdots \\ \int_a^b x^n dx \end{pmatrix} \quad (3.122)$$

La matrice de ce système est une matrice de Vandermonde dont le déterminant est

$\prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$. Elle est inversible si et seulement si les points x_i sont tous distincts, et

dans ce cas la solution de (3.122) est unique. $\square$

Cette méthode consiste à approximer une intégrale par une somme pondérée de valeurs de fonctions. En principe, si on ne peut intégrer les polynômes élémentaires de la

forme de Lagrange, tout irait bien. Mais les calculs des poids $A_i^{(n)}$ sont long et fastidieux. D'abord, le coût total d'obtention des constantes des dénominateurs des fonctions L_i est de $(n+1)(2n+1)$ opérations arithmétiques. Puis, le coût total de réécriture, de combinaison et d'intégration de ces polynômes est de $(6n+3)$ opérations arithmétiques. Donc, en principe, le coût d'obtention de l'approximation dépasse n^3 opérations arithmétiques. Pire encore, il faut refaire tout ce calcul pour tout nouveau tableau de valeurs de la fonction f .

La méthode des coefficients indéterminés est plus rapide. Au lieu d'évaluer la forme de Lagrange du polynôme d'interpolation, puis de l'intégrer, on évalue les coefficients $A_0, A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \dots, A_n^{(n)}$ en exigeant que la forme soit exacte pour des polynômes de degré inférieur ou égal à n . Comme l'intégrale est linéaire, cela revient à exiger que la formule soit exacte pour les monômes $1, x, x^2, x^3, \dots, x^n$.

Exemple 33.

Pour évaluer $\int_1^4 f(x)dx$, développons une formule de la forme

$$\int_1^4 f(x)dx \approx af(1) + bf(2) + cf(5),$$

et appliquons-là à dans différents tableaux de valeurs. Les coefficients indéterminés a, b et c sont fixés pour que la forme soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2, puisqu'on peut faire passer un polynôme d'interpolation de degré inférieur ou égal à 2 par les trois abscisses. On obtient :

(i) Formule exacte pour $f(x) = 1$

$$\iff \int_1^4 1dx = a + b + c \iff 3 = a + b + c.$$

(ii) Formule exacte pour $f(x) = x$

$$\iff \int_1^4 xdx = a + 2b + 5c \iff \frac{15}{2} = a + 2b + 5c.$$

(iii) Formule exacte pour $f(x) = x^2$

$$\iff \int_1^4 x^2dx = a + 4b + 25c \iff 21 = a + 4b + 25c$$

Donc, il faut résoudre un système linéaire de trois équations à trois inconnues. On obtient

$$a = -\frac{3}{8}; \quad b = 3; \quad c = \frac{3}{8}.$$

D'où la formule générale

$$\int_1^4 f(x)dx \approx -\frac{3}{8}f(1) + 3f(2) + \frac{3}{8}f(5).$$

Pour le tableau des données,

x	1	2	5
$f(x)$	2	5	13

$$\int_1^4 f(x)dx \approx -\frac{3}{8}f(1) + 3f(2) + \frac{3}{8}f(5) = 19,125.$$

Naturellement, l'intégration de degré 2 passant par les points $(1, 2)$, $(2, 5)$ et $(5, 13)$ aurait donné la même réponse numérique, puisque la méthode des coefficients indéterminés permet justement d'évaluer astucieusement l'intégrale du polynôme d'interpolation écrit sous la forme de Lagrange.

Exemple 34.

Calculons une valeur exacte de l'intégrale suivante

$$I = \int_0^2 x^3 dx$$

par la méthode des coefficients indéterminés et vérifions le résultat par la méthode analytique traditionnelle.

Pour ramener l'intégrale I dans l'intervalle $[-1, 1]$, on doit faire un changement de variable en posant

$$x = t + 1$$

On a donc $dx = dt$, et on obtient

$$\int_0^2 x^3 dx = \int_{-1}^1 (t+1)^3 dt.$$

Pour résoudre cette équation, on doit estimer a , b et c tels que

$$\int_{-1}^1 (t+1)^3 dt = ag(-1) + bg(0) + cg(1)$$

On impose les polynômes de bases x^j avec $j = 0, 1, 2$, c'est à dire les polynômes de base de la forme 1 , x , x^2 et on calcule ces coefficients en établissant les trois relations suivantes ;

Lorsque $g(x) = 1$, on a $g(-1) = 1$, $g(0) = 1$ et $g(1) = 1$ et donc

$$\int_{-1}^1 1 dx = 2 = a(1) + b(1) + c(1) = 2.$$

Lorsque $g(x) = x$, on a $g(-1) = -1$, $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$ et donc

$$\int_{-1}^1 x dx = 0 = a(-1) + b(0) + c(1) = -a + c = 0$$

Lorsque $g(x) = x^2$, on a $g(-1) = 1$, $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$ et donc

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3} = a(1) + b(1) + c(1) = 2/3.$$

On doit alors résoudre le système

$$\begin{cases} a + b + c &= 2 \\ -a &+ c &= 0 \\ a &+ c &= \frac{2}{3} \end{cases}$$

dont l'on déduit $a = 1/3$, $b = 4/3$ et $c = 1/3$, et donc

$$\begin{aligned} \int_0^2 x^3 dx &= \int_{-1}^1 (t+1)^3 dt \\ &= (1/3)(-1+1)^3 + (4/3)(0+1)^3 + (1/3)(1+1)^3 = 4. \end{aligned}$$

Par la méthode analytique traditionnelle, on a $\int_0^2 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 4$.

▷

Cette méthode offre l'avantage de donner une formule générale au lieu d'une valeur numérique dans un cas particulier. Donc, elle est plus générale que celle de l'intégration du polynôme d'interpolation issu des données numériques.

La méthode des coefficients indéterminés s'applique à un tableau de valeurs de valeurs d'une fonction qui contient des valeurs de dérivées : il suffit d'imposer un nombre suffisant de conditions d'exactitude.

Exemple 35.

On cherche à approximer $\int_1^5 f(x)dx$ en fonction de $f(0)$, $f(2)$, $f'(2)$ et $f(3)$.

Imposons quatre contraintes à la formule approximative

$$\int_a^b f(x)dx \approx af(0) + bf(2) + cf'(2) + df(3),$$

pour qu'elle soit exacte pour les monômes 1 , x , x^2 et x^3 . On obtient les quatres équations

$$\begin{cases} a + b + 0c + d & = & 5 \\ 0a + 2b + c + 3d & = & 25/2 \\ 0a + 4b + 4c + 9d & = & 125/3 \\ 0a + 8b + 12c + 27d & = & 625/4, \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$\int_1^5 f(x)dx \approx -\frac{55}{144}f(0) - \frac{125}{16}f(2) - \frac{275}{24}f'(2) + \frac{475}{36}f(3).$$

Exercice corrigé 22

Déterminer $A_0^{(3)}, \dots, A_3^{(3)}$, x_1 et x_2 tels que la formule de quadrature

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = A_0^{(3)}f(-1) + A_1^{(3)}f(x_1) + A_2^{(3)}f(x_2) + A_3^{(3)}f(1) + R_3(f),$$

soit exacte pour des polynômes de plus haut degré possible.

Ecrivons que la formule est exacte pour $f(x) = 1, x, \dots, x^5$.
Posons

$$\begin{aligned} \psi_3(x) &= (x - x_1)(x - x_2)(x - 1)(x + 1) \\ &= x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0. \end{aligned}$$

En utilisant la méthode des coefficients indéterminés, on trouve

$$\frac{2}{5} + \frac{2}{3}a_2 + 2a_0 = 0$$

$$\frac{2}{5}a_3 + \frac{2}{3}a_1 = 0.$$

On a également $\psi_3(1) = \psi_3(-1) = 0$, d'où

$$1 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0$$

$$1 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = 0$$

d'où l'on déduit

$$a_1 = a_3 = 0$$

$$a_2 = -6/5, \quad a_0 = 1/5.$$

Par conséquent

$$\psi_3(x) = -\frac{1}{5}(x-1)(x+1)(5x^2-1),$$

d'où l'on déduit

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad x_2 = 1/\sqrt{5}.$$

En reportant ces valeurs dans les relations qui expriment que la formule de quadrature est exacte pour $f(x) = 1, x, x^2, x^3$, on obtient :

$$A_0^{(3)} = A_3^{(3)} = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad A_1^{(3)} = A_2^{(3)} = \frac{5}{6},$$

d'où la formule

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{5}{6} \left[\left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \right) + f \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \right) \right] + \frac{1}{6} [f(-1) + f(1)] + R_3(f). \quad (3.123)$$

Cette formule de quadrature est connue sous le nom de méthode de Lobatto.

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{2}{n(n+1)} [f(-1) + f(1)] + \sum_{i=1}^{n-1} A_i^{(n)} + R_n(f) \quad (3.124)$$

où les x_i sont les racines de P'_n (P_n étant le polynôme de Legendre de degré n). On a

$$A_i^{(n)} = \frac{2}{n(n+1)P_n^2(x_i)} \quad x_i \neq \pm 1$$

$$R_n(f) = -\frac{(n+1)n^3 2^{2n+1} [(n-1)!]^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi) \quad \xi \in [-1, 1].$$

3.11 Exercices

Ces exercices de type classique vous permettront un entraînement progressif. Certains, plus complexes, vous entraîneront à mobiliser rapidement vos connaissances sur un thème précis du cours, ou sur des questions diverses.

Exercice 1.

Soit à approximer l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ et soit $x_0 = a$, $x_1 = b$ et $h = b - a$. On rappelle la formule simple du trapèze :

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12}f'(\xi),$$

1. Approximer les intégrales suivantes :

(a)	$\int_{0,5}^1 x^4 dx;$	$\int_1^{1,6} \frac{2x}{x^2 - 4} dx$
(b)	$\int_0^{0,5} \frac{2}{x - 4} dx;$	$\int_1^{1,6} \frac{2dx}{x^2 - 4}$
(c)	$\int_1^{1,5} x^2 \ln x dx;$	$\int_0^{\pi/4} x \sin x dx$
(d)	$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx;$	$\int_0^{\pi/4} e^{3x} \sin 2x dx.$

2. Refaire les mêmes calculs en utilisant la méthode simple de Simpson.

3. Refaire les mêmes calculs en utilisant la méthode simple du point milieu.

Exercice 2.

Détermination des bornes de l'erreur dans les méthodes du trapèze et de Simpson.

1. La méthode du trapèze donne $\int_1^3 \ln x dx \approx \ln 3$. Déterminer une borne pour l'erreur.
2. La méthode de Simpson donne $\int_1^3 \ln x dx \approx \frac{1}{3}(\ln 3 + 4 \ln 2)$. Déterminer une borne pour l'erreur.

Exercice 3.

Déterminer h pour la méthode du trapèze composée pour

$$f(x) = \sin x^3, \quad [a, b] = [0, 2], \quad |\text{erreur}| \leq 0, 1.$$

Exercice 4.

Utiliser la méthode composite du trapèze, avec les valeurs de n indiquées pour approximer les intégrales suivantes :

1. (a)	$\int_1^2 x \ln x dx, \quad n = 4;$	$\int_0^2 e^{2x} \sin 3x dx, \quad n = 8$
(b)	$\int_{-2}^2 x^3 e^x dx, \quad n = 4;$	$\int_1^3 \frac{2dx}{x^2 - 4}, \quad n = 8$